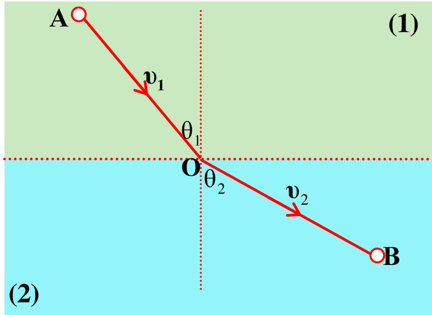
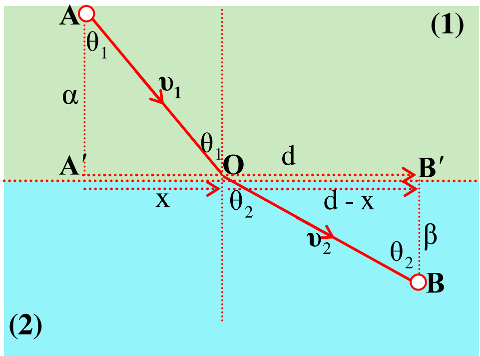
Οπτικό ανάλογο στην κινηματική



Η ταχύτητα ενός κινητού σε ένα μέσον (1) έχει μέτρο υ_1 και σε ένα μέσον (2) έχει μέτρο υ_2. Όταν το κινητό μεταβαίνει από το σημείο Α του μέσου (1) στο σημείο Β του μέσου (2) με ευθύγραμμες επιμέρους ισοταχείς κινήσεις, ο απαιτούμενος χρόνος γίνεται ελάχιστος, όταν οι τροχιές έχουν τέτοιες διευθύνσεις ώστε να ισχύει $\frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$.

Απάντηση

Απάντηση



Έστω ότι το κινητό ακολουθεί την διαδρομή του σχήματος μέσω της οποίας επιτυγχάνεται ο ελάχιστος χρόνος. Στο μέσον (1) ακολουθεί την διαδρομή ΑΟ που σχηματίζει γωνία θ_1 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια και στο μέσον (2) ακολουθεί την διαδρομή ΟΒ που σχηματίζει γωνία θ_2 με την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια. Ο χρόνος από το Α στο Β είναι $t=\dfrac{AO}{\upsilon_1}+\dfrac{OB}{\upsilon_2}$ και από την γεωμετρία του σχήματος και σε συνάρτηση με την απόσταση x του σημείου Ο από το Α΄ η σχέση του χρόνου γίνεται $t=\dfrac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{\upsilon_1}+\dfrac{\sqrt{(d-x)^2+\beta^2}}{\upsilon_2}$ (1) . Εδώ ουσιαστικά ζητείται η τιμή της μεταβλητής x ώστε ο χρόνος της ποσότητας (1) να γίνει ελάχιστος. Αυτό όμως επιτυγχάνεται όταν η πρώτη παράγωγος της (1) ως προς την μεταβλητή x μηδενίζεται .

$$\frac{dt}{dx}=0\xrightarrow{(1)}\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}}{\upsilon_1}+\frac{\sqrt{(d-x)^2+\beta^2}}{\upsilon_2}\right]=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\left(x^2+\alpha^2\right)^{1/2}}{\upsilon_1}+\frac{\left((d-x)^2+\beta^2\right)^{1/2}}{\upsilon_2}\right]=0\Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+\alpha^2\right)^{-1/2}\cdot(2x)}{\upsilon_1}+\frac{\frac{1}{2}\left((d-x)^2+\beta^2\right)^{-1/2}\cdot 2(d-x)(-1)}{\upsilon_2}=0\Rightarrow$$

$$\frac{x}{\upsilon_1\sqrt{x^2+\alpha^2}}-\frac{d-x}{\upsilon_2\sqrt{(d-x)^2+\beta^2}}=0\xrightarrow{\text{σχήμα}}\frac{x}{\upsilon_1\cdot AO}-\frac{d-x}{\upsilon_2\cdot OB}=0\Rightarrow\frac{1}{\upsilon_1}\frac{x}{AO}=\frac{1}{\upsilon_2}\frac{d-x}{OB}$$

$$\xrightarrow{\text{σχήμα}}\frac{1}{\upsilon_1}\eta\mu\theta_1=\frac{1}{\upsilon_2}\eta\mu\theta_2\ \ \text{ή}\ \ \frac{\eta\mu\theta_1}{\upsilon_1}=\frac{\eta\mu\theta_2}{\upsilon_2}\ \ \text{ή}\ \ \boldsymbol{\frac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}}$$ **(ὅ. ἔ .δ).**

(*) Αν είχαμε φωτεινή ακτίνα που διαθλάται από διαφανές μέσον (1) με δείκτη διάθλασης n_1 προς άλλο διαφανές μέσον (2) με δείκτη διάθλασης n_2 για τις ταχύτητες του φωτός υ_1 και υ_2 στα δύο μέσα ισχύει $n_1=\dfrac{c}{\upsilon_1}$ ή $\upsilon_1=\dfrac{c}{n_1}$ και $\upsilon_2=\dfrac{c}{n_2}$, οπότε η τελευταία σχέση γράφεται

… $\dfrac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2}=\dfrac{c/n_1}{c/n_2}$ ή $\dfrac{\eta\mu\theta_1}{\eta\mu\theta_2}=\dfrac{n_2}{n_1}$ ή $\mathbf{n_1\cdot\eta\mu\theta_1=n_2\cdot\eta\mu\theta_2}$ [Νόμος Snell].

(**) Στην διάθλαση του φωτός ακολουθείται η πορεία του ελάχιστου χρόνου.

(***) Στην ανάκλαση του φωτός ακολουθείται η πορεία του ελάχιστου δρόμου.