

Συμβολή αρμονικού παλμού και κύματος.

Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 δημιουργίας αρμονικών κυμάτων με εξίσωση ταλάντωσης $y(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t)$ είναι στην επιφάνεια ενός υγρού και αρχίζουν να δημιουργούν αρμονικά κύματα τη $t_0=0$ με την πηγή Π_1 να ταλαντώνεται και να εκπέμπει κύματα **μόνο για χρόνο τριών περιόδων $[0,3T]$** . Για δύο σημεία M και N της επιφανείας του υγρού που απέχουν από τις πηγές αποστάσεις $M(r_1=0,4m$ και $r_2=2m)$ και $N(r_1=0,8m$ και $r_2=1,6m)$, να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης και ταχύτητας της ταλάντωσης που θα εκτελέσουν και να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις. Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης των ανωτέρω κυμάτων $v=2m/s$ και αγνοούνται οι παντός είδους αποσβέσεις.

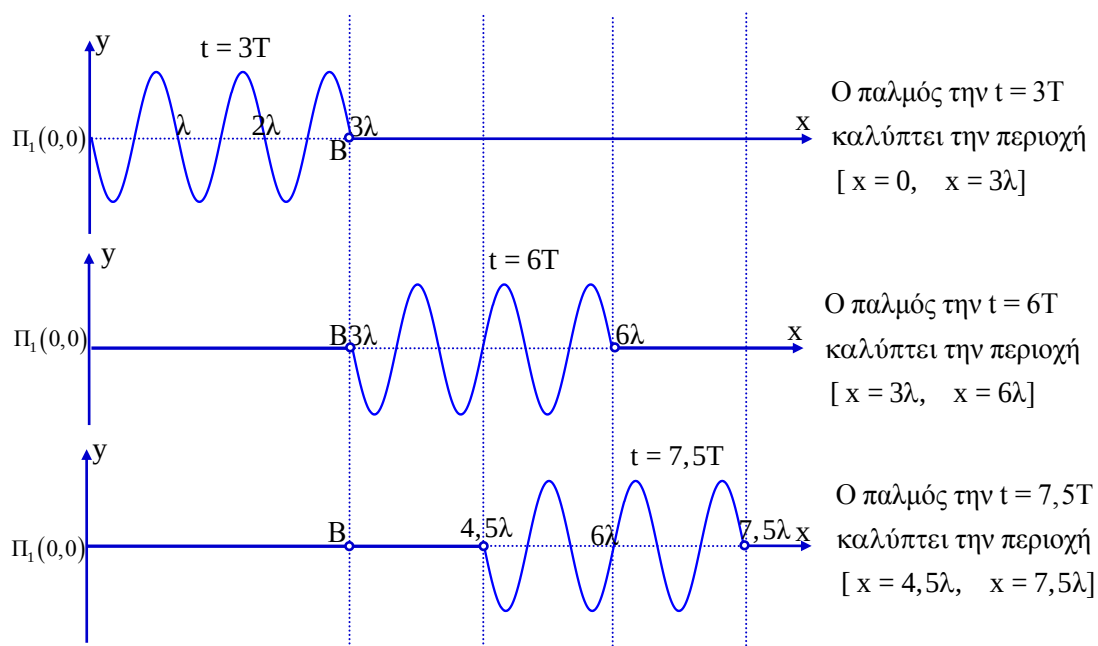
Απάντηση:

Βασικά εισαγωγικά σχόλια για τον παλμό...

Όταν μια πηγή κυμάτων ταλαντώνεται μόνο για κάποιο χρονικό διάστημα Δt τότε το εκπεμπόμενο κύμα δεν έχει συνέχεια, αλλά διαδίδεται στο μέσον μόνο το τμήμα του κύματος που δημιουργήθηκε στον αντίστοιχο χρόνο ... δημιουργείται έτσι ένα **χρονικά περιορισμένο κύμα** ... ένας **παλμός**. Έτσι κάθε σημείο του μέσου ταλαντώνεται μόνο για το χρονικό διάστημα Δt που θέλει ο παλμός να «περάσει» από το σημείο αυτό.

Η πηγή Π_1 ταλαντώνεται μόνο στο χρονικό διάστημα $[0,3T]$ και μόνο σε αυτό εκπέμπει κύμα που μόλις τελειώσει η εκπομπή, το τμήμα αυτό του κύματος (ο παλμός) έχει φθάσει σε απόσταση από την πηγή $x = v \cdot 3T = 3\lambda$. Έτσι δημιουργείται μια «εικόνα» τριών μηκών κύματος που «τρέχει» στο μέσον διάδοσης.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τρία στιγμιότυπα του περιορισμένου αυτού κύματος (παλμού) σε μια ευθεία διάδοσης $\Pi_1 x$ τις χρονικές στιγμές $3T$, $6T$ και $7,5T$.



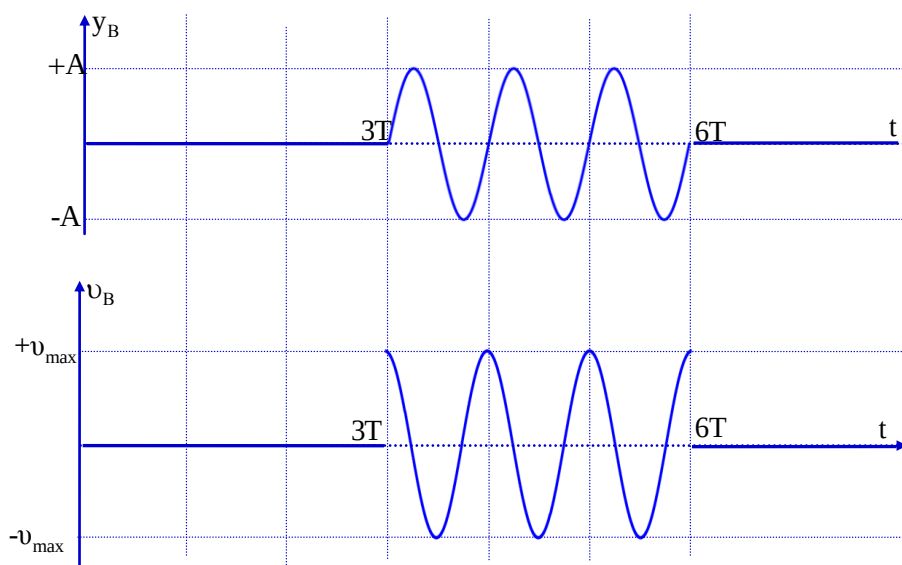
Παρατηρείστε ότι κάθε σημείο του μέσου διάδοσης ταλαντώνεται μόνο για χρόνο $3T$. Για παράδειγμα το σημείο που είναι στη θέση B($x=3\lambda$) ταλαντώνεται από την στιγμή $t=3T$ που

φθάνει ο παλμός σε αυτό μέχρι τη χρονική $t=6T$ που ολοκληρώνεται το «πέρασμα» από το σημείο αυτό. Οι εξισώσεις απομάκρυνσης $y_B(t)$ και ταχύτητας $v_B(t)$ του σημείου $B(x_B=3\lambda)$ είναι

$$y_B(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x_M}{\lambda}\right) \text{ ή } y_B(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi 3\lambda}{\lambda}\right) \text{ ή}$$

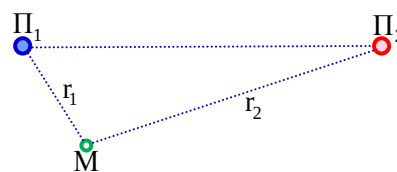
$$y_B(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}t - 5\pi\right) \text{ και } v_B(t) = \frac{2\pi A}{T} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{T}t - 5\pi\right)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η απομάκρυνση της ταλάντωσης του $B(x=3\lambda)$ με το χρόνο $y_B(t)$ και η ταχύτητα της ταλάντωσης του $B(x=3\lambda)$.



Τώρα η άσκηση ... συμβολής παλμού και κύματος...

Από τις εξισώσεις ταλάντωσης των πηγών $y(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t)$ βλέπουμε ότι κάθε κύμα αναγκάζει τα μόρια του μέσου να ταλαντώνονται με πλάτος $A=0,2\text{m}$, με συχνότητα $f \dots 2\pi f = 10\pi$ ή $f = 5\text{Hz}$ και περίοδο $T=1/f$ ή $T=0,2\text{s}$...τα δε κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda=v/f$ ή $\lambda=0,4\text{m}$.

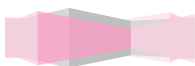


Το κύμα-παλμός από την Π_1 φθάνει στο M τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{v}$ ή $t_1 = \frac{0,4\text{m}}{2\text{m/s}}$ ή

$t_1 = 0,2\text{s}$ και αναγκάζει το M σε ταλάντωση με εξίσωση $y_{1M}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)$ ή

$y_{1M}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi \cdot 0,4}{0,4}\right)$ ή $y_{1M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 2\pi)$. Εδώ όμως θέλει ιδιαίτερη

προσοχή ...**η ταλάντωση του M υπάρχει** μόνο για όσο χρόνο θέλει ο παλμός να περάσει από το M που είναι όσος είναι ο χρόνος εκπομπής του, δηλαδή $3T = 0,6\text{s}$ και η ταλάντωση του M διαρκεί από τη στιγμή $t_1 = 0,2\text{s}$ έως $t_2 = 0,8\text{s}$.



Το κύμα από την Π_2 φθάνει στο M τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{v}$ ή $t_2 = \frac{2m}{2m/s}$ ή $t_2 = 1s$ και αναγκάζει το M σε ταλάντωση με εξίσωση $y_{2M}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$ ή $y_{2M}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi \cdot 2}{0,4}\right)$ ή $y_{2M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 10\pi)$. Η ταλάντωση αυτή του M σε αντίθεση με την ταλάντωση από τον παλμό **υπάρχει συνεχώς** μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 1s$.

Από τις χρονικές στιγμές ταλάντωσης του M από τον παλμό της Π_1 και το κύμα της Π_2 διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

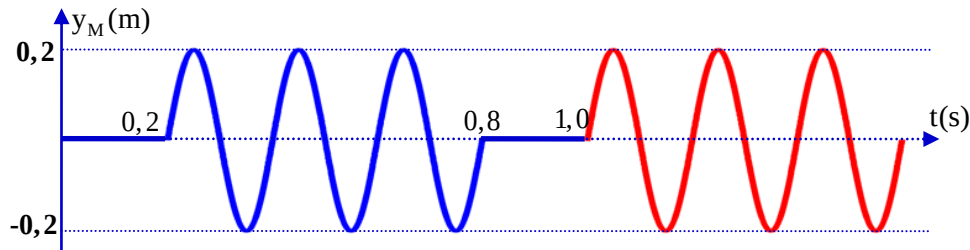
- * Για $0s \leq t < 0,2s$ στο M δεν έχει φθάσει ούτε ο παλμός της Π_1 ούτε το κύμα της Π_2 , οπότε το M παραμένει ακίνητο με $y_M(t) = 0$.
- * Για $0,2s \leq t \leq 0,8s$ στο M έχει φθάσει μόνο ο παλμός της Π_1 και αναγκάζει το M να ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης $y_{1M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 2\pi)$ και εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης $v_{1M}(t) = 2\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t - 2\pi)$
- * Για $0,8s < t < 1,0s$ ο παλμός της Π_1 έχει ήδη περάσει από το M , το δε κύμα της Π_2 δεν έχει φθάσει ακόμη στο M με αποτέλεσμα το M παραμένει ακίνητο με $y_M(t) = 0$.
- * Για $t \geq 1,0s$ ο παλμός της Π_1 έχει ήδη περάσει από το M αλλά έχει ήδη φθάσει το κύμα από την Π_2 και έτσι το M ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας αυτού του κύματος με εξίσωση απομάκρυνσης $y_{2M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 10\pi)$ και εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης $v_{2M}(t) = 2\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t - 10\pi)$

Παρατηρούμε ότι **στο M δεν υπάρχει συμβολή** του παλμού από την πηγή Π_1 και του κύματος από την πηγή Π_2

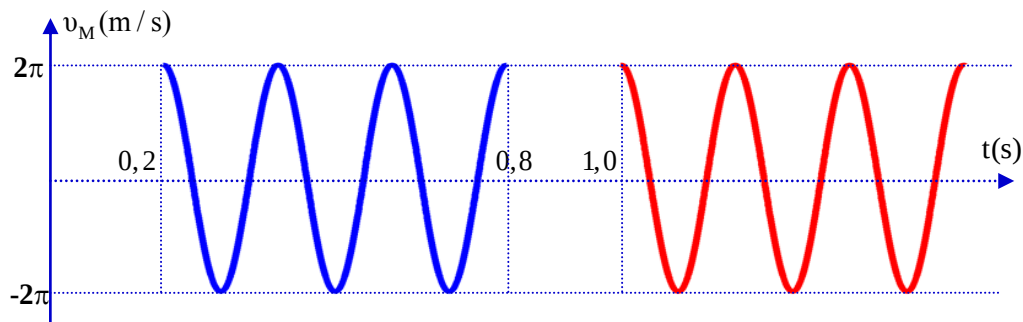
Συνοπτικά όλα τα ανωτέρω για την ταλάντωση του M φαίνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα

0	0,2	0,8	1,0	t(s)
$0s \leq t < 0,2s$	$0,2s \leq t \leq 0,8s$	$0,8s < t < 1s$	$t \geq 1s$	
$y_M(t) = 0$ Στο M δεν έχει φθάσει κανένα κύμα	$y_{1M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 2\pi)$ Το M ταλαντώνεται μόνο από τον παλμό.	$y_M(t) = 0$ Ο παλμός έχει περάσει από το M ... και το κύμα από την Π_2 δεν έχει φθάσει στο M	$y_{2M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 10\pi)$ Το M ταλαντώνεται μόνο από το κύμα της πηγής Π_2 .	

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης με το χρόνο της ταλάντωσης του σημείου Μ εξαιτίας του παλμού από την Π₁ και του κύματος από την Π₂.



Στο διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης με το χρόνο της ταλάντωσης του σημείου Μ εξαιτίας του παλμού από την Π₁ και του κύματος από την Π₂.



Τώρα η συμβολή παλμού και κύματος στο σημείο Ν...

Το κύμα-παλμός από την Π₁ φθάνει στο Ν τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{v}$ ή $t_1 = \frac{0,8\text{m}}{2\text{m/s}}$ ή $t_1 = 0,4\text{s}$ και αναγκάζει το

Ν σε ταλάντωση με εξίσωση $y_{1N}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)$

$$\text{ή } y_{1N}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi \cdot 0,8}{0,4}\right) \text{ ή}$$

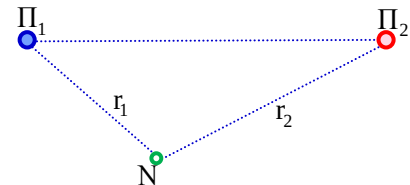
$y_{1N}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4\pi)$. Εδώ όμως θέλει ιδιαίτερη προσοχή ... **η ταλάντωση του Ν υπάρχει** μόνο για όσο χρόνο θέλει ο παλμός να περάσει από το Ν που είναι όσος είναι ο χρόνος εκπομπής του δηλαδή $3T = 0,6\text{s}$ και **διαρκεί από τη στιγμή $t_1 = 0,4\text{s}$ έως $t_2 = 1,0\text{s}$.**

Το κύμα από την Π₂ φθάνει στο Ν τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{v}$ ή $t_2 = \frac{1,6\text{m}}{2\text{m/s}}$ ή $t_2 = 0,8\text{s}$ και

αναγκάζει το Ν σε ταλάντωση με εξίσωση $y_{2N}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$ ή

$$y_{2N}(t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - \frac{2\pi \cdot 1,6}{0,4}\right) \text{ ή } y_{2N}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 8\pi). \text{ Η ταλάντωση αυτή του Ν σε}$$

αντίθεση με την ταλάντωση από τον παλμό **υπάρχει συνεχώς** μετά τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,8\text{s}$.



Από τις χρονικές στιγμές ταλάντωσης του Ν από τον παλμό της Π_1 και το κύμα της Π_2 διαπιστώνουμε τα ακόλουθα:

- * Για $0s \leq t < 0,4s$ στο Ν δεν έχει φθάσει ούτε ο παλμός της Π_1 ούτε το κύμα της Π_2 , οπότε το Ν παραμένει ακίνητο με $y_N(t) = 0$.
- * Για $0,4s \leq t < 0,8s$ στο Ν έχει φθάσει μόνο ο παλμός της Π_1 και αναγκάζει το Ν να ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης $y_{1N}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4\pi)$ και εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης $v_{1N}(t) = 2\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t - 4\pi)$.
- * Για $0,8s \leq t \leq 1,0s$ υπάρχει συμβολή στο Ν του παλμού της Π_1 και του κύματος της Π_2 και το Ν έχει εξίσωση ταλάντωσης $y_N(t) = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\eta\mu\left(\omega t - \pi\frac{r_1 + r_2}{\lambda}\right) \xrightarrow{s.I} y_N(t) = 2 \cdot 0,2\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{0,8 - 1,6}{0,4}\right)\eta\mu\left(10\pi t - \pi\frac{0,8 + 1,6}{0,4}\right)$ ή $y_N(t) = 0,4\eta\mu(10\pi t - 6\pi)$ και εξίσωση ταχύτητας $v_{2N}(t) = 4\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t - 6\pi)$
- * Για $t > 1,0s$ ο παλμός της Π_1 έχει ήδη περάσει από το Ν και το Ν συνεχίζει να ταλαντώνεται μόνο εξαιτίας αυτού του κύματος από την Π_2 με εξίσωση απομάκρυνσης $y_{2N}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 8\pi)$ και εξίσωση ταχύτητας ταλάντωσης $v_{2N}(t) = 2\pi\sigma\upsilon\nu(10\pi t - 8\pi)$

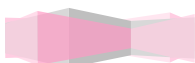
Παρατηρούμε ότι **στο Ν υπάρχει συμβολή του παλμού από την πηγή Π_1 και του κύματος από την πηγή Π_2 μόνο στο $0,8s \leq t \leq 1,0s$**

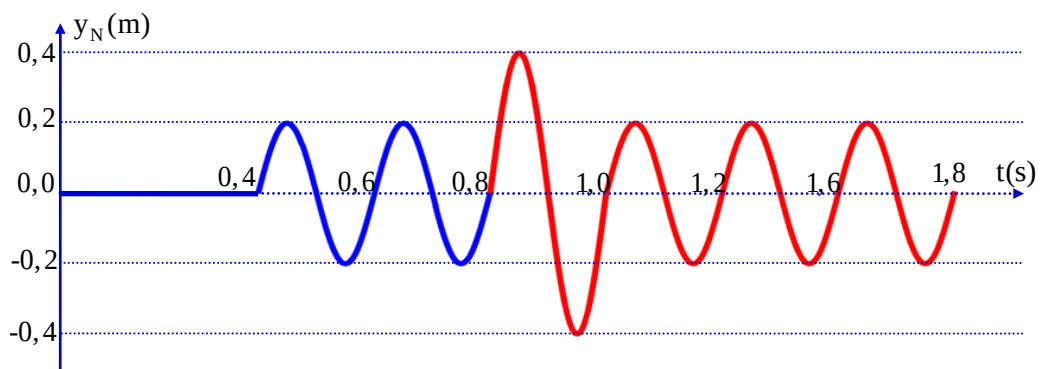
Συνοπτικά όλα τα ανωτέρω για την ταλάντωση του Ν φαίνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα

0	0,4	0,8	1,0	t(s)
$0s \leq t < 0,4s$	$0,4s \leq t < 0,8s$	$0,8s \leq t \leq 1s$	$t > 1s$	
$y_M(t) = 0$ Στο Μ δεν έχει φθάσει κανένα κύμα	$y_{1M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4\pi)$ Το Μ ταλαντώνεται μόνο από τον παλμό.	$y_N(t) = 0,4\eta\mu(10\pi t - 6\pi)$ Συμβολή παλμού και κύματος	$y_{2M}(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 8\pi)$ Το Μ ταλαντώνεται μόνο από το κύμα της πηγής Π_2 .	

5

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η γραφική με το χρόνο της απομάκρυνσης του σημείου Ν εξαιτίας του παλμού από την Π_1 και του κύματος από την Π_2 .





Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γραφική με το χρόνο της ταχύτητας του σημείου Ν εξαιτίας του παλμού από την Π_1 και του κύματος από την Π_2 .

