

Μια διαφορετική συμβολή από ομόρροπη διάδοση κυμάτων στην ίδια χορδή...

Στην $0(x=0)$ αρχή μιας ομογενούς ελαστικής χορδής $x'x$ υπάρχουν δύο πηγές αρμονικών κυμάτων που δημιουργούν κύματα με πλάτος $A=0,1\text{m}$, με συχνότητα $f=5\text{Hz}$ και ταχύτητα διάδοσης $v=2\text{m/s}$. Οι πηγές του 1ου και κύματος 2ου κύματος αρχίζουν να ταλαντώνονται την $t'=0$ και $t_0=0,1\text{s}$ αντίστοιχα με θετική ταχύτητα ταλάντωσης.

α) Να γραφεί η εξίσωση $y(x,t)$ του κύματος που δημιουργείται στη χορδή.

Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες:

β) το στιγμιότυπο του κύματος για τη χρονική στιγμή $t_1=0,4\text{s}$.

γ) η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης $y_M(t)$ και της ταχύτητας $v_M(t)$ με το χρόνο, ενός σημείου M που έχει συντεταγμένη $M(x=0,2\text{m})$.

Αν η πυκνότητα της χορδής ανά μονάδα μήκους είναι $\mu=0,05\text{Kg/m}$,

δ) να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης της χορδής τη χρονική στιγμή $t_1=0,4\text{s}$.

Απάντηση

α) $f=5\text{Hz}$, $T=0,2\text{s}$, $\omega=10\pi\text{ rad/s}$, $v=\lambda f \Rightarrow \lambda=0,4\text{m}$

1ο κύμα:

Εξίσωση πηγής: $y_0(t) = A\eta\mu(\omega t)$ ή $y_0(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t)$.

Εξίσωση 1ου κύματος: $y_1(x,t) = A\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

ή $y_1(x,t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x)$ (S.I) για $t \geq 0\text{s}$.

2ο κύμα:

Εξίσωση πηγής: $y_0(t) = A\eta\mu[\omega(t-t_0)]$ ή $y_0(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - \pi)$.

Εξίσωση 2ου κύματος: $y_2(x,t) = A\eta\mu\left(\omega t - \pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ ή $y_2(x,t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x - \pi)$ (S.I) ή

$y_2(x,t) = -0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x)$ (S.I) για $t \geq 0,1\text{s}$.

Η συμβολή αρχίζει μετά την $t = 0,1\text{s}$ και η κύμανση που προκύπτει έχει εξίσωση

$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ ή $y(x,t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x) - 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x)$ ή **$y(x,t)=0$**

Εδώ θέλει ιδιαίτερη προσοχή ... το 1ο κύμα που δημιουργήθηκε που δημιουργήθηκε στο χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t=0,1\text{s}$ διαδόθηκε ήδη στη χορδή και δεν αναιρείται εξαιτίας της συμβολής.

Έτσι τη χρονική στιγμή $t=t_1$ το πρώτο κύμα έχει φθάσει στη θέση $x_1=vt_1=2t_1$ (S.I), ενώ το 2ο κύμα έχει φθάσει στην θέση $x_2=v(t_1-0,1)=2(t_1-0,2)$ (S.I).

Για την περιοχή $x_2 < x \leq x_1$ η κύμανση περιγράφεται μόνο από την εξίσωση του 1ου κύματος $y_1(x,t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x)$ (S.I)

Για την περιοχή $x \leq x_2$ η κύμανση περιγράφεται από την εξίσωση της συμβολής που είναι $y(x,t)=0$. Όλα αυτά φαίνονται καλύτερα στο ερώτημα (β).

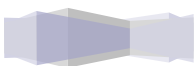
β) Τη χρονική στιγμή $t_1=0,4\text{s}$ το 1ο κύμα έφθασε στην θέση $x_1=2t_1=0,8\text{m}=2\lambda$ και το 2ο κύμα έφθασε στη θέση $x_2=2(t_1-0,2)=0,6\text{m}=1,5\lambda$... οπότε για την περιοχή $0,6\text{m} < x \leq 0,8\text{m}$ η κύμανση περιγράφεται μόνο από την εξίσωση του 1ου κύματος $y_1(x,t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x)$ (S.I) και για την περιοχή $x \leq 0,6\text{m}$ από την εξίσωση της συμβολής που είναι $y(x,t)=0$.

Ας το δούμε αυτό με βάση τη αρχή ανεξαρτησίας διάδοσης των κυμάτων

Εξίσωση του στιγμιότυπου του 1ου κύματος την $t_1=0,4\text{s}$: $y_1(x) = 0,1\eta\mu(4\pi - 5\pi x)$... που έχει φθάσει στην $x_1=0,8\text{m}=2\lambda$... και περιγράφεται από την $y_1(x) = 0,1\eta\mu(4\pi - 5\pi x)$ ή

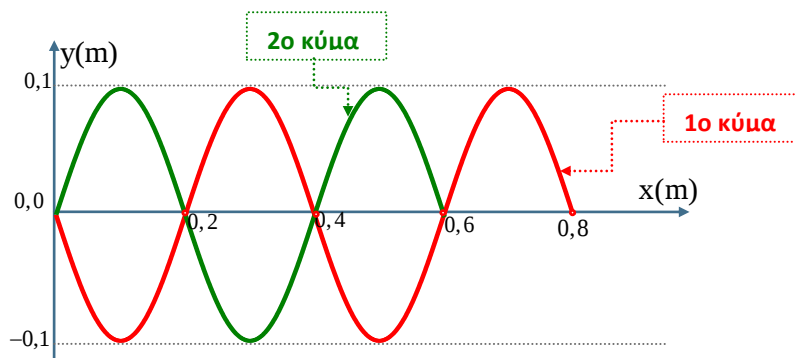
$y_1(x) = -0,1\eta\mu(5\pi x)$...

Εξίσωση του στιγμιότυπου του 2ου κύματος την $t_1=0,4\text{s}$: $y_2(x) = 0,1\eta\mu(3\pi - 5\pi x)$... που έχει



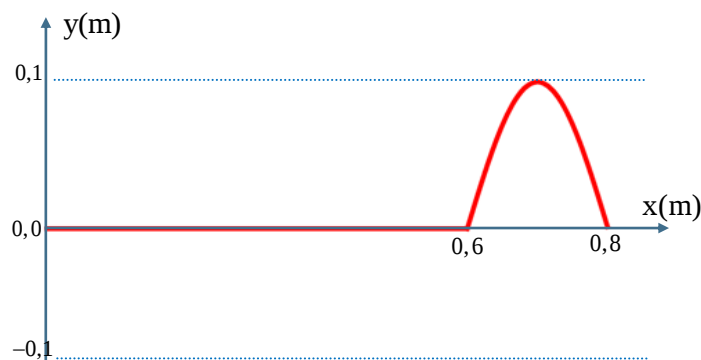
φθάσει στην $x_2=0,6\text{m}=1,5\lambda \dots$ και περιγράφεται από την $y_2(x)=0,1\eta\mu(3\pi-5\pi x)$ ή $y_1(x)=+0,1\eta\mu(5\pi x) \dots$

Και τώρα οι ανεξάρτητες κυμάνσεις αλλά και το αποτέλεσμα της συμβολής.



...και το αποτέλεσμα της συμβολής

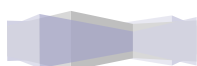
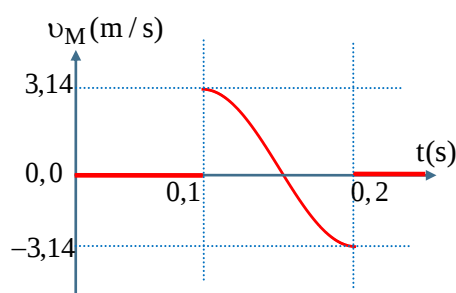
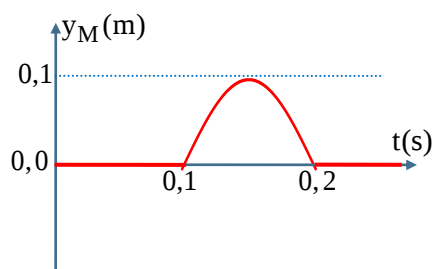
... που είναι ένας παλμός



γ) Κάθε σημείο ταλαντώνεται μόνο για χρόνο $\Delta t = \frac{\lambda / 2}{v} = \frac{0,2}{2} = 0,1\text{s}$ εξαιτίας μόνο του 1ου κύματος ...και μετά ακινητοποιείται εξαιτίας της συμβολής. Το M αρχίζει να ταλαντώνεται την $t = \frac{OM}{v} = \frac{0,2\text{m}}{2\text{m/s}} = 0,1\text{s}$ μέχρι την χρονική στιγμή $t=0,2\text{s}$ και μετά μένει ακίνητο. Στη διάρκεια ταλάντωσής του το M έχει εξισώσεις:

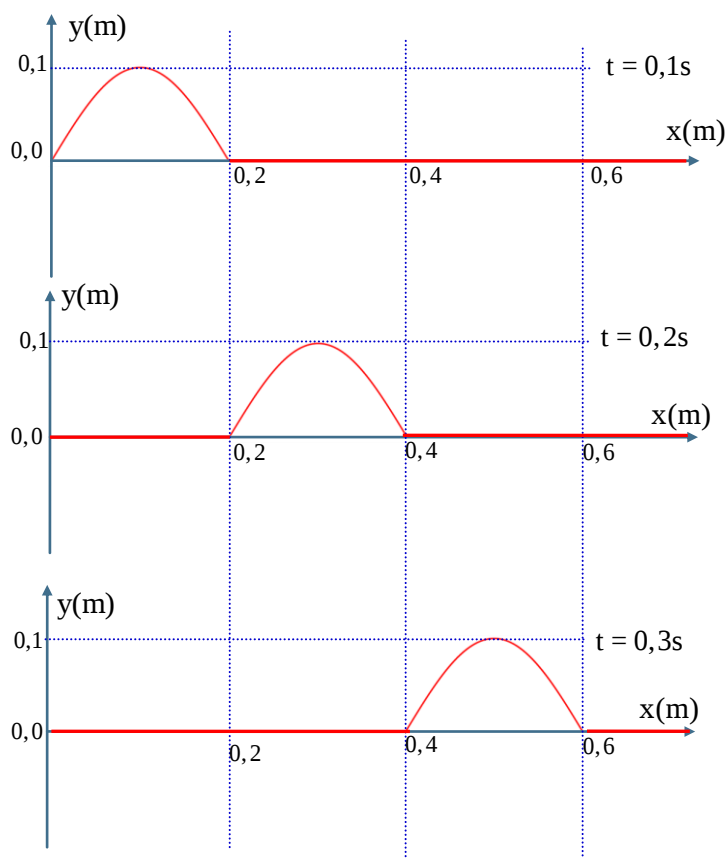
$y_M(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - 5\pi x_M) \dots y_M(t) = 0,1\eta\mu(10\pi t - \pi)$ ή $y_M(t) = -0,1\eta\mu(10\pi t)$ για $0,1\text{s} \leq t \leq 0,2\text{s}$

$v_M(t) = \pi \sigma\upsilon\nu(10\pi t - 5\pi x_M) \dots v_M(t) = 3,14\sigma\upsilon\nu(10\pi t - \pi)$ ή $v_M(t) = -3,14\sigma\upsilon\nu(10\pi t)$ για $0,1\text{s} \leq t \leq 0,2\text{s}$



Παρατήρηση:

Μετά τη χρονική στιγμή $t=0,1s$ στη χορδή υπάρχει ένας παλμός (μισό κύμα) μήκους $\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 0,2m$ που διαδίδεται με ταχύτητα $v=2m/s$...όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



δ) Μετά τη χρονική στιγμή $t=0,1s$ ενέργεια έχει μόνο το τμήμα $\Delta x=0,2m$ της χορδής που ταλαντώνεται ... $E = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \mu \Delta x \omega^2 A^2 \xrightarrow{S.I} E = \frac{1}{2} 0,05 \cdot 0,2 \cdot (10\pi)^2 0,1^2$
 $\xrightarrow{\pi^2 \approx 10} E = 0,05J$.

(*) Παρόμοιες εφαρμογές είναι οι 6.48, 6.49 αλλά και οι κυματικοί παλμοί 6.54 έως 6.61 στο βιβλίο μου Σύνθετα Θέματα.

