Συμβολή κυμάτων από πηγές που έχουν διαφορά φάσης π και έχουν έναρξη ταλάντωσης την t=0

Στην επιφάνεια μιας ήρεμης λίμνης υπάρχουν δύο πηγές Π_1 και Π_2 παραγωγής επιφανειακών αρμονικών εγκάρσιων κυμάτων περιόδου T πλάτους A και μήκους κύματος λ. Οι πηγές Π_1 και Π_2 αρχίζουν την ταλάντωσή τους τη χρονική στιγμή $t=0$ και έχουν εξισώσεις $y_1 = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ και $y_2 = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi\right)$.

Ένα μικρό ξύλο που είναι σε ένα σημείο M της επιφανείας του νερού απέχει από τις πηγές αποστάσεις $\Pi_1 M = 4\lambda$ και $\Pi_2 M = 1,5\lambda$.

A. Το μήκος s της τροχιάς που διαγράφει αυτό το ξύλο M, από την στιγμή που δέχεται το πρώτο κύμα μέχρι την έναρξη της συμβολής των κυμάτων στη θέση αυτή, είναι:

A.1) $s = 10A$ A.2) $s = 12A$ A.3) $s = 10A$ ή $s = 12A$

B. Το πλάτος ταλάντωσης του ξύλου M μετά την συμβολή είναι:

B.1) $A_M = 0$ B.2) $A_M = A$ B.3) $A_M = 2A$ B.4) $A_M = 1,5A$

Γ. Η απομάκρυνση του M ύστερα από χρόνο $\Delta t = \frac{55T}{12}$ μετά την έναρξη της συμβολής είναι:

Γ.1) $y_M = 0$ Γ.2) $y_M = +\frac{A}{6}$ Γ.1) $y_M = +\frac{A}{2}$ Γ.1) $y_M = -A$

Δ. Αν τόσο η πηγή Π_1 όσο και η πηγή Π2 είχαν εξίσωση ταλάντωσης $y(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi\right)$ και άρχιζαν την ταλάντωση την χρονική στιγμή $t=0$ το πλάτος ταλάντωσης του M θα είναι:

Δ.1) $A_M = 0$ Δ.2) $A_M = A$ Δ.3) $A_M = 2A$ Δ.4) $A_M = 1,5A$

Σε κάθε περίπτωση επιλέξτε με δικαιολόγηση τη σωστή πρόταση.

Απάντηση:

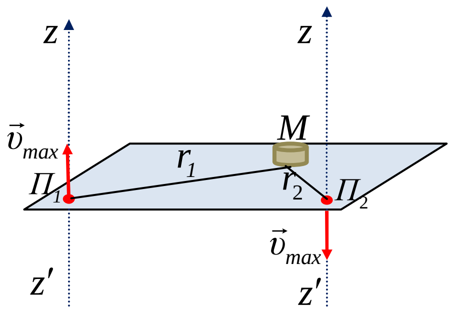
A) Οι πηγές την χρονική στιγμή $t=0$, μόλις αρχίζουν να ταλαντώνονται και να παράγουν κύματα, έχουν απομάκρυνση και ταχύτητα :

Πηγή Π_1:

$$y_1 = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \xrightarrow{t=0} y_1 = 0$$

$\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \xrightarrow{t=0} \upsilon_1 = +\upsilon_{max} > 0$

Η πηγή Π₁… όπως και κάθε άλλο μόριο της επιφανείας του νερού που δέχεται το κύμα αυτής της πηγής θα αρχίζει να ταλαντώνεται από την θέση $y=0$ με θετική ταχύτητα ταλάντωσης $\upsilon_{max} > 0$.



Πηγή Π₂:

$y_2 = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi\right) \xrightarrow{t=0} y_2 = 0,$

$\upsilon_2 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi\right) \xrightarrow{t=0} \upsilon_1 = -\upsilon_{max} < 0.$ Η πηγή Π₂… όπως και κάθε άλλο μόριο της επιφανείας του νερού που δέχεται το κύμα αυτής της πηγής θα αρχίζει να ταλαντώνεται από την θέση $y=0$ με θετική ταχύτητα ταλάντωσης $\upsilon_{max} < 0$.

Πρώτα φθάνει στο ξύλο Μ το κύμα από την πηγή Π₂ . Αυτό φθάνει την χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} = \frac{1,5\lambda}{\upsilon} = 1,5T$ και το αναγκάζει σε ταλάντωση με εξίσωση $y_{2M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi-\frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow$

$$y_{2M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi-\frac{2\pi.1,5\lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow y_{2M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-2\pi\right)$$

Σχόλιο: Ο χρόνο άφιξης του κύματος στο Μ δίνεται από την εξίσωση $t=\frac{r}{\upsilon}$ μόνο αν η πηγή αρχίζει να ταλαντώνεται την $t=0$ (όπως στην περίπτωση της άσκησης) . Γενικά για να δούμε πότε φθάνει το κύμα από την Π₂ στο Μ ο γενικός τρόπος είναι να θέσουμε $\varphi_M = \pi \Rightarrow \frac{2\pi t_2}{T} - 2\pi = \pi \Rightarrow t_2 = 1,5T$.

Το κύμα από την Π₁ φθάνει στο Μ την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} = \frac{4\lambda}{\upsilon} = 4T$ και το αναγκάζει σε ταλάντωση με εξίσωση $y_{1M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow$

$$y_{1M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi.4\lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow y_{1M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-8\pi\right)$$

Σχόλιο: Εδώ … εναλλακτικά… για να δούμε πότε φθάνει το κύμα από την $Π_1$ στο Μ ο γενικός τρόπος είναι να θέσουμε $\varphi_M = 0 \Rightarrow \frac{2\pi t_1}{T} - 8\pi = 0 \Rightarrow t_1 = 4T$.

Ο χρόνος που μεσολαβεί από την έναρξη ταλάντωσης του Μ, όταν φθάνει το 1ο κύμα, μέχρι την έναρξη της συμβολής όταν φθάνει και το δεύτερο κύμα είναι $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow \Delta t = 4T - 1{,}5T$. Τόσο την $t_2 = 1{,}5T$ όσο και την $t_1 = 4T$ το ξύλο Μ είναι στην θέση $y = 0$, άρα το μήκος της τροχιάς του είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του πλάτους A… σε κάθε $T/4$ αντιστοιχεί μήκος τροχιάς A, άρα $S_{ολ} = 2{,}5.4A \Rightarrow \boxed{S_{ολ} = 10A}$.

Β) Εδώ χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή γιατί οι πηγές δεν είναι σύγχρονες και δεν ισχύει η «γνωστή» σχέση για το πλάτος… $A_M = \left|2A\sigma\upsilon\nu\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right|$

1ος τρόπος αντιμετώπισης .

Η εξίσωση ταλάντωσης του ξύλου μετά την συμβολή είναι

$$y_M(t) = y_{1M}(t) + y_{2M}(t) \Rightarrow y_M(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - 8\pi\right) + A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - 2\pi\right) \Rightarrow$$

$$y_M(t) = 2A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - 5\pi\right)\sigma\upsilon\nu(3\pi) \Rightarrow y_M(t) = -2A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - 5\pi\right)$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης του Μ είναι $\boxed{A_M = 2A}$

2ος τρόπος αντιμετώπισης .

Το Μ εκτελεί σύνθετη ταλάντωση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης, του ιδίου κέντρου , ίδιου πλάτους ,ίδιας συχνότητας με διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \left(\frac{2\pi t}{T} - 2\pi\right) - \left(\frac{2\pi t}{T} - 8\pi\right) \Rightarrow \Delta\varphi = 6\pi\ rad$. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_M = \sqrt{A^2 + A^2 + 2.A.A.\sigma\upsilon\nu 6\pi} \Rightarrow$

$\boxed{A_M = 2A}$

Γ) Η χρονική στιγμή που ζητείται η απομάκρυνση του ξύλου είναι $t = 4T + \frac{55T}{12} = \frac{103T}{12}$ την οποία αν θέσουμε στην εξίσωση απομάκρυνσης μετά την συμβολή $y_M(t) = -2A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - 5\pi\right)$ βρίσκουμε

$$\ldots y_M = -2A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{103T}{12} - 5\pi\right) \Rightarrow y_M = -2A\eta\mu\left(\frac{103\pi}{6} - 5\pi\right) \Rightarrow$$

$$y_M = -2A\eta\mu\left(\frac{102\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-5\pi\right) \Rightarrow \boxed{y_M = -A}$$

Το θέμα μπορεί να αντιμετωπισθεί και με την ανεξαρτησία των ταλαντώσεων που εκτελεί το ξύλο Μ…

1η ταλάντωση: $y_{1M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-2\pi\right) \Rightarrow y_{1M} = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{103T}{12}-2\pi\right)$

$$\Rightarrow y_{1M} = A\eta\mu\left(\frac{103\pi}{6}-2\pi\right) \Rightarrow y_{1M} = -\frac{A}{2}$$

2η ταλάντωση: $y_M(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-8\pi\right) \Rightarrow y_{2M} = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{103T}{12}-8\pi\right)$

$$\Rightarrow y_{2M} = A\eta\mu\left(\frac{103\pi}{6}-8\pi\right) \Rightarrow y_{2M} = -\frac{A}{2}$$

$$y_M = y_{1M}+y_{2M} \Rightarrow y_M = -\frac{A}{2}-\frac{A}{2} \Rightarrow y_M = -A$$

Δ) Τώρα η εξίσωση ταλάντωσης του ξύλου εξαιτίας του κύματος από την Π_2 είναι η ίδια $y_{2M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-2\pi\right)$ και το κύμα αρχίζει την $t_2 = \frac{r_2}{\upsilon} = \frac{1{,}5\lambda}{\upsilon} = 1{,}5T$.

Το κύμα από την Π_1 φθάνει στο Μ την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{\upsilon} = \frac{4\lambda}{\upsilon} = 4T$ και το αναγκάζει σε ταλάντωση με εξίσωση $y_{1M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi-\frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) \Rightarrow y_{1M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi-\frac{2\pi.4\lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow$

$$y_{1M}(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-7\pi\right)$$

Η εξίσωση ταλάντωσης του ξύλου μετά την συμβολή $t \geq 4T$ είναι

$$y_M(t) = y_{1M}(t)+y_{2M}(t) \Rightarrow y_M(t) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-7\pi\right)+A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-2\pi\right) \Rightarrow$$

$y_M(t) = 2A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-4{,}5\pi\right)\sigma\upsilon\nu(2{,}5\pi) \Rightarrow y_M(t) = 0$ …**απόσβεση…**

Άρα το πλάτος ταλάντωσης του Μ είναι $\boxed{A_M = 0}$

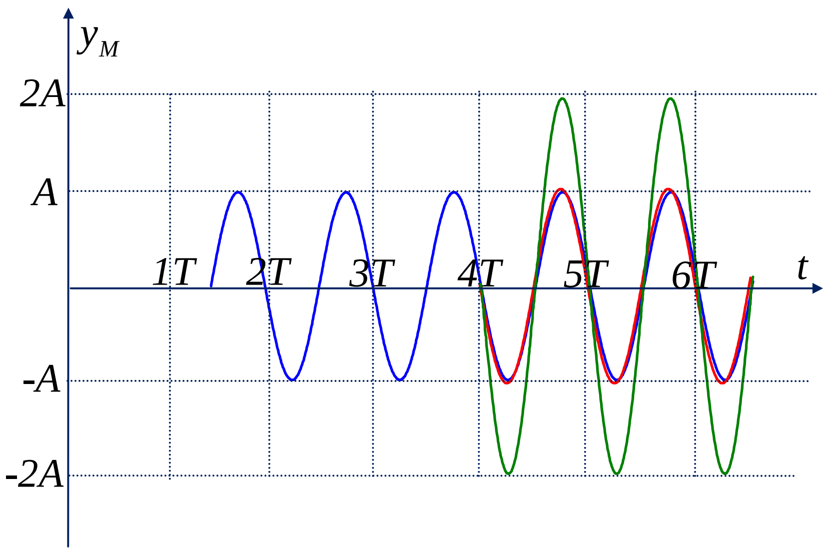
Σχόλιο: Τώρα οι πηγές έχουν εξισώσεις $y_{\Pi 1}(t) = y_{\Pi 2}(t) = A\eta\mu\left(\dfrac{2\pi t}{T} + \pi\right)$ δηλαδή οι πηγές είναι σύγχρονες και ισχύουν οι «γνωστές» σχέσεις… οπότε για το πλάτος μπορούμε να γράψουμε $A_M = \left|2A\sigma\upsilon\nu\pi\dfrac{r_1 - r_2}{\lambda}\right| \Rightarrow$

$$A_M = \left|2A\sigma\upsilon\nu\pi\frac{4\lambda - 1{,}5\lambda}{\lambda}\right| \Rightarrow A_M = \left|2A\sigma\upsilon\nu(2{,}5\pi)\right| \Rightarrow A_M = 0 .$$

ή… επειδή $r_1 - r_2 = 4\lambda - 1{,}5\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 2{,}5\lambda \Rightarrow r_1 - r_2 = 5\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow$

$r_1 - r_2 = (2.2 + 1)\dfrac{\lambda}{2}$ δηλαδή η διαφορά των αποστάσεων του ξύλου από την πηγή είναι ακέραιο περιττό πολλαπλάσιο του $\dfrac{\lambda}{2}$ θα είναι σε υπερβολή απόσβεσης … στην 3^{η} μετά την μεσοκάθετο.

Σχόλιο: Η απάντηση στην Α και Β ερώτηση μέσα από τις γραφικές παραστάσεις των επιμέρους ταλαντώσεων αλλά και της σύνθετης για το ξύλο Μ.... ενίσχυση μετά την 4Τ.



Σχόλιο: Η απάντηση στην Δ ερώτηση μέσα από τις γραφικές παραστάσεις των επιμέρους ταλαντώσεων αλλά και της σύνθετης για το ξύλο Μ… απόσβεση μετά την 4Τ.