

Η εξίσωση κύματος με αρχική φάση που δεν «φαίνεται» και οι γραφικές παραστάσεις της φάσης και του στιγμιότυπου κύματος.

Στην αρχή $O(x=0)$ μιας χορδής Ox υπάρχει πηγή παραγωγής αρμονικών εγκάρσιων κυμάτων που διαδίδονται με ταχύτητα $v=2m/s$. Η πηγή αρχίζει την ταλάντωσή της κάποια στιγμή με θετική ταχύτητα ταλάντωσης $v_{\text{ταλ}} > 0$ που έχει μέγιστη τιμή $v_{\text{max}}=2\pi m/s$. Οι χρονικές στιγμές παρατήρησης του κύματος μετριοούνται με ένα χρονόμετρο που «πατήσαμε» τη έναρξη λειτουργίας πριν την έναρξη ταλάντωσης της πηγής. Ένα σημείο $M(x_M=1m)$ της χορδής, μετά την έναρξη της ταλάντωσης του εξαιτίας του κύματος, έχει για πρώτη φορά μηδενική ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1=0,85s$ ενώ η ταχύτητά έχει για δεύτερη

φορά αλγεβρική τιμή $v=-\frac{v_{\text{max}}}{2}$ την χρονική στιγμή $t_2=\frac{28}{30}s$.

α) Να βρείτε την περίοδο και το μήκος κύματος του κύματος.

β) Υπολογίστε τη χρονική στιγμή έναρξης της ταλάντωσης του σημείου M .

γ) Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης $y(x,t)$ για το κύμα.

δ) Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τις χρονικές εξισώσεις της φάσης $\varphi_M(t)$ και της απομάκρυνσης $y_M(t)$ του σημείου M .

ε) Να σχεδιάστε σε βαθμολογημένους άξονες, για την χρονική στιγμή που το M είναι για δεύτερη φορά στην μέγιστη απόσταση από την θέση ηρεμίας, το στιγμιότυπο του κύματος και την φάση $\varphi(x)$ όλων των σημείων της χορδής που έχουν δεχθεί το κύμα σε συνάρτηση με την συντεταγμένη τους στον άξονα Ox .

Αν η πηγή $O(x=0)$ άρχισε να ταλαντώνεται με αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης,

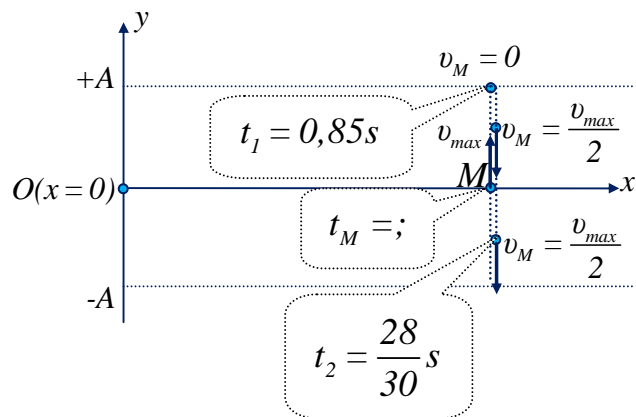
στ) να γράψετε την εξίσωση του κύματος,

ζ) να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τις χρονικές εξισώσεις της φάσης $\varphi_M(t)$ και της απομάκρυνσης $y_M(t)$ του σημείου M .

η) Να σχεδιάστε σε βαθμολογημένους άξονες, για την χρονική στιγμή που το M αρχίζει να ταλαντώνεται, την φάση $\varphi(x)$ όλων των σημείων της χορδής που έχουν δεχθεί το κύμα σε συνάρτηση με την συντεταγμένη τους, καθώς και το στιγμιότυπο κύματος την ίδια στιγμή.

Απάντηση:

α) Το σημείο Μ έστω ότι αρχίζει να ταλαντώνεται την χρονική στιγμή t_M και έχει για πρώτη φορά ταχύτητα $v_M = 0$ μόλις βρίσκεται στη θέση $y_M = +A$, ύστερα από χρόνο $\frac{T}{4}$ από την έναρξη



της ταλάντωσης, $t_1 - t_M = \frac{T}{4}$.

Το Μ έχει για δεύτερη φορά

ταχύτητα $v = -\frac{v_{max}}{2}$ ύστερα από χρόνο Δt_2 από τότε που άρχισε η ταλάντωση.

$$y_M = A \eta \mu \varphi_M \Rightarrow v = v_{max} \sigma \upsilon \nu \varphi_M \Rightarrow -\frac{v_{max}}{2} = v_{max} \sigma \upsilon \nu \varphi_M \Rightarrow \sigma \upsilon \nu \varphi_M = -\frac{1}{2}$$

$\varphi_M = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$ και $\varphi_M = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$... η δεύτερη φορά καλύπτεται

από την $\varphi_M = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_M = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \Delta t_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2T}{3} \Rightarrow$

$$t_2 - t_M = \frac{2T}{3} \dots (t_2 - t_M) - (t_1 - t_M) = \frac{2T}{3} - \frac{T}{4} \Rightarrow$$

$$t_2 - t_1 = \frac{5T}{12} \Rightarrow \frac{28}{30} - 0,85 = \frac{5T}{12} \Rightarrow T = 0,20s$$

$$f = 5Hz, \omega = 10\pi \text{ rad} / s, \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2m/s}{5Hz} \Rightarrow \lambda = 0,4Hz \text{ και } v_{max} = \omega A$$

$$\Rightarrow 2\pi = 10\pi A \Rightarrow A = 0,2m$$

β) Το σημείο Μ άρχισε να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_M = t_1 - \frac{T}{4} \Rightarrow$

$$t_M = 0,85s - \frac{0,20s}{4} \Rightarrow t_M = 0,80s.$$

γ) Η πηγή που είναι στην αρχή $O(x=0)$ της χορδής Ox άρχισε να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = t_M - \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow t_0 = 0,8s - \frac{1m}{2m/s} \Rightarrow$

$t_0 = 0,3s$. Η εξίσωση ταλάντωσης της αρχής $O(x=0)$ είναι $y_o(t) = A \eta \mu \omega(t - t_0) \Rightarrow y_o(t) = 0,2 \eta \mu 10\pi(t - 0,3) \Rightarrow$

$y_o(t) = 0,2 \eta \mu (10\pi t - 3\pi)$ και η εξίσωση του κύματος

$$y(x,t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - 3\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow y(x,t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 3\pi - 5\pi x).$$

και διαφορετικά ... Έστω ότι η εξίσωση του κύματος έχει την μορφή

$$y(x,t) = A\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right) \Rightarrow y(x,t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x + \varphi_0) \text{ και από}$$

αυτή γράφουμε την αντίστοιχη εξίσωση ταλάντωσης για το σημείο M
 $y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi \cdot (+1) + \varphi_0) \Rightarrow y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi + \varphi_0).$

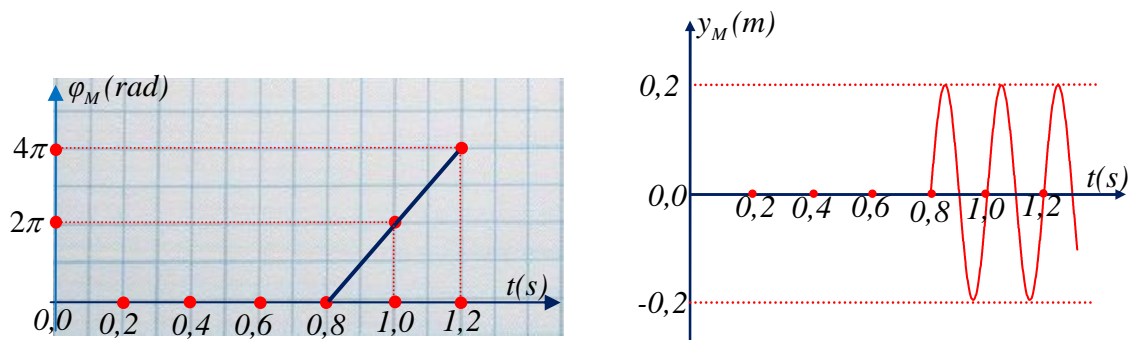
Το M μόλις αρχίζει να ταλαντώνεται δηλαδή την $t_M = 0,80s$ έχει φάση $\varphi_M = 0 \Rightarrow 10\pi \cdot 0,80 - 5\pi + \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = -3\pi \dots$ άρα

$$y(x,t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x - 3\pi)$$

δ) Η εξίσωση ταλάντωσης του σημείο M είναι

$$y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi \cdot 1 - 3\pi) \Rightarrow$$

$$y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 8\pi) \quad (S.I) \quad \forall t \geq 0,80s.$$



ε) Η χρονική στιγμή t_3 που το M είναι για δεύτερη φορά στην μέγιστη

απόσταση από την θέση ηρεμίας είναι $t_3 = 0,8 + \frac{3T}{4} \Rightarrow t_3 = 0,95s$

$$y(x,t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x - 3\pi) \xrightarrow{t=0,95s} y(x) = 0,2\eta\mu(6,5\pi - 5\pi x)$$

η οποία και αποτελεί την εξίσωση του στιγμιότυπου για τη στιγμή $t_3 = 0,95s$.

Το κύμα τη χρονική στιγμή $t_3 = 0,95s$ έχει φθάσει στη θέση x που έχει φάση μηδέν..

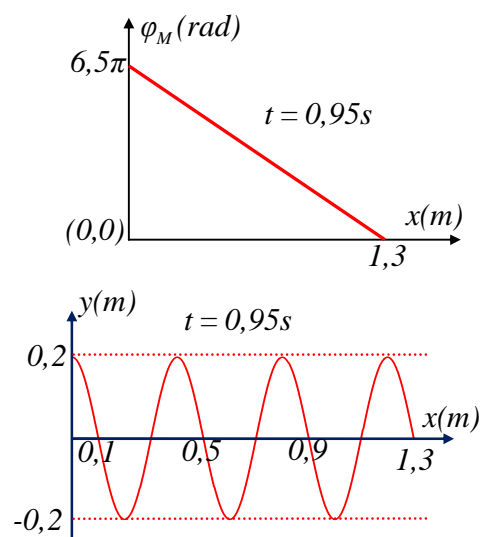
$$\varphi(x) = 6,5\pi - 5\pi x = 0 \Rightarrow x = 1,3m$$

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{1,3m}{0,4m} = 3 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = 3\lambda + \frac{\lambda}{4}$$

«Απλοποιημένη» εξίσωση-μορφή του στιγμιότυπου...

$$y(x) = 0,2\eta\mu(6,5\pi - 5\pi x) \Rightarrow$$

$$y(x) = 0,2\sigma\upsilon\upsilon(5\pi x)$$

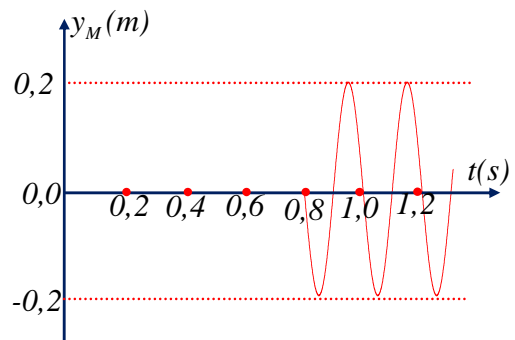
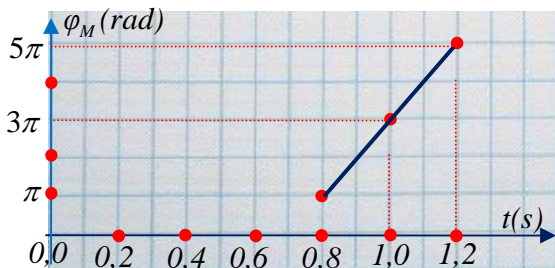


στ) Η πηγή που είναι στην αρχή $O(x=0)$ άρχισε να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0,3s$ με $v_{ταλ} < 0$ έχοντας εκείνη την στιγμή φάση π και εξίσωση ταλάντωσης $y_o(t) = A\eta\mu[\omega(t - t_0) + \pi] \Rightarrow y_o(t) = 0,2\eta\mu[10\pi(t - 0,3) + \pi] \Rightarrow y_o(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 2\pi)$.

Τώρα η εξίσωση του κύματος θα είναι $y(x,t) = 0,2\eta\mu\left(10\pi t - 2\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow y(x,t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x - 2\pi)$.

ζ) $y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi \cdot 1 - 2\pi) \Rightarrow y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 7\pi)$

Σχόλιο: Το Μ τη στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται (δέχεται το κύμα) ... έχει $y_M = 0$, $v_{ταλ} < 0$ και φάση $\varphi_M = 0 \Rightarrow 10\pi t_M - 7\pi = \pi \Rightarrow t_M = 0,80s$... αναμενόμενο...



η) Η χρονική στιγμή t_M που αρχίζει να ταλαντώνεται το Μ είναι $t_M = 0,80s$ $y(x,t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x - 2\pi) \xrightarrow{t=0,80s}$

$$y(x) = 0,2\eta\mu(6\pi - 5\pi x)$$

η οποία και αποτελεί την εξίσωση του στιγμιότυπου για τη στιγμή $t_M = 0,80s$.

Το κύμα τη χρονική στιγμή $t_M = 0,80s$ έχει φθάσει στη θέση x που έχει φάση $\varphi = \pi$!

$$\varphi(x) = 6\pi - 5\pi x = \pi \Rightarrow x = 1m$$

..αναμενόμενο...

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{1m}{0,4m} = 2 + \frac{2}{4} \Rightarrow x = 2\lambda + \frac{2\lambda}{4}$$

«Απλοποιημένη» εξίσωση-μορφή το στιγμιότυπου...

$$y(x) = 0,2\eta\mu(6\pi - 5\pi x) \Rightarrow$$

$$y(x) = -0,2\eta\mu(5\pi x)$$

