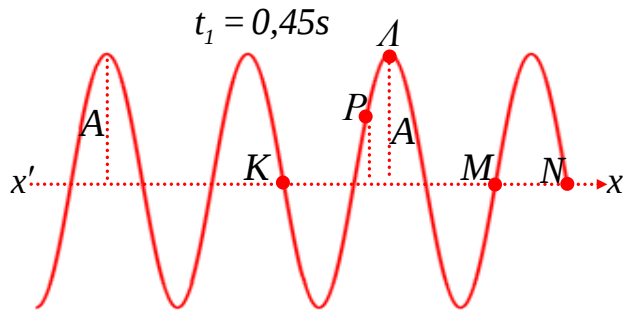


Οι εξισώσεις ταλάντωσης των μορίων μιας χορδής χωρίς να είναι γνωστή η εξίσωση του κύματος.

Στο σχήμα φαίνεται ένα τμήμα από το στιγμιότυπο ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος πλάτους $A = 0,2\text{m}$ που διαδίδεται σε μια χορδή $x'x$ και τη στιγμή $t_1 = 0,45\text{s}$ έχει φθάσει σε ένα σημείο N της χορδής. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων της χορδής εξαιτίας του κύματος είναι $v_{\max} = 2\pi \frac{m}{s}$, ενώ δεν είναι γνωστή η θέση της πηγής και ο χρόνος έναρξης της ταλάντωσής της.



α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας με την χρονική στιγμή έναρξης της ταλάντωσης των διαφόρων μορίων και τη φάση αυτών τη στιγμή $t_1 = 0,45\text{s}$.

Σημείο	K	Λ	M	N
Χρονική στιγμή έναρξης της ταλάντωσης				
Φάση της ταλάντωσης του σημείου την $t=t_1$				

β) Να γραφεί η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σημείου N , $y_N = f(t)$.

γ) Να γίνουν σε βαθμολογημένους άξονες σε συνάρτηση με τον χρόνο οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης και της φάσης ταλάντωσης του σημείου N .

δ) Για την χρονική στιγμή $t_2 = 0,70\text{s}$ να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες σε συνάρτηση με την απόσταση από το σημείο K η γραφική παράσταση της φάσης των διαφόρων σημείων της χορδής που δέχονται το κύμα αργότερα από το σημείο K . Η απόσταση από το K να εκφραστεί σε κλάσματα του μήκους κύματος λ .

ε) Για την χρονική στιγμή $t_2 = 0,70\text{s}$ να γίνει το στιγμιότυπο του κύματος για όλα τα σημεία που έχουν δεχθεί το κύμα αργότερα από το σημείο K .

στ) Να γραφεί η εξίσωση του σημείου P που την $t_1 = 0,45\text{s}$ έχει απομάκρυνση $y = +\frac{A}{2}$.

στ) Εκτιμάτε ότι για το ανωτέρω κύμα ισχύει η εξίσωση $y(x,t) = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$;

Απάντηση:

$$\alpha) v_{\max} = \omega A \Rightarrow 2\pi = \omega 0,2 \Rightarrow \omega = 10\pi \text{ rad/s} \Rightarrow f = 5\text{Hz} \Rightarrow T = 0,20\text{s}$$

Τα διάφορα σημεία της χορδής άρχισαν να ταλαντώνονται την χρονική στιγμή $t = t_1 - \frac{\Delta x}{v}$, όπου Δx η απόσταση του σημείου από το Ν και v η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

$$K: t_K = t_1 - \frac{\Delta x}{v} = t_1 - \frac{2\lambda}{v} = t_1 - 2T = 0,45 - 2 \cdot 0,20 \Rightarrow t_K = 0,05\text{s}$$

$$\Lambda: t_\Lambda = t_1 - \frac{\Delta x}{v} = t_1 - \frac{5\lambda/4}{v} = t_1 - \frac{5T}{4} = 0,45 - \frac{5 \cdot 0,20}{4} \Rightarrow t_\Lambda = 0,20\text{s}$$

$$M: t_M = t_1 - \frac{\Delta x}{v} = t_1 - \frac{\lambda/2}{v} = t_1 - \frac{T}{2} = 0,45 - \frac{0,20}{2} \Rightarrow t_M = 0,35\text{s}$$

Ο χρόνος ταλάντωσης κάθε μορίου Κ, Λ, Μ, Ν μέχρι την $t_1 = 0,45\text{s}$ είναι

$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ και η φάση του κάθε σημείου έως τότε θα είναι

$$\varphi = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

$$K: \Delta t_K = \frac{\Delta x}{v} = \frac{2\lambda}{v} = 2T, \varphi_K = \frac{2\pi}{T} \Delta t \Rightarrow \varphi_K = \frac{2\pi}{T} 2T \Rightarrow \varphi_K = 4\pi \text{ rad}$$

$$\Lambda: \Delta t_\Lambda = \frac{\Delta x}{v} = \frac{5\lambda/4}{v} = \frac{5T}{4}, \varphi_\Lambda = \frac{2\pi}{T} \Delta t \Rightarrow \varphi_\Lambda = \frac{2\pi}{T} \frac{5T}{4} \Rightarrow \varphi_\Lambda = 2,5\pi \text{ rad}$$

$$M: \Delta t_M = \frac{\Delta x}{v} = \frac{\lambda/2}{v} = \frac{T}{2}, \varphi_M = \frac{2\pi}{T} \Delta t \Rightarrow \varphi_M = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \Rightarrow \varphi_M = \pi \text{ rad}$$

$$N: \Delta t_N = 0, \varphi_N = 0$$

Σημείο	K	Λ	Μ	Ν
Χρονική στιγμή έναρξης της ταλάντωσης (s)	0,05	0,20	0,35	0,45
Φάση της ταλάντωσης του σημείου την $t=t_1$ (rad)	4π	$2,5\pi$	π	0

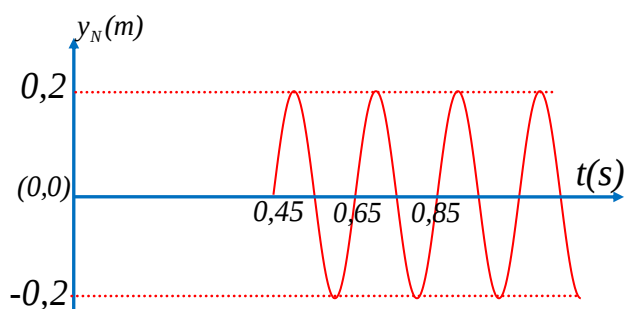
$$\beta) y_N(t) = A\eta\mu[\omega(t - t_1)] \Rightarrow y_N(t) = 0,2\eta\mu[10\pi(t - 0,45)]$$

$$\Rightarrow y_N(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4,5\pi)$$

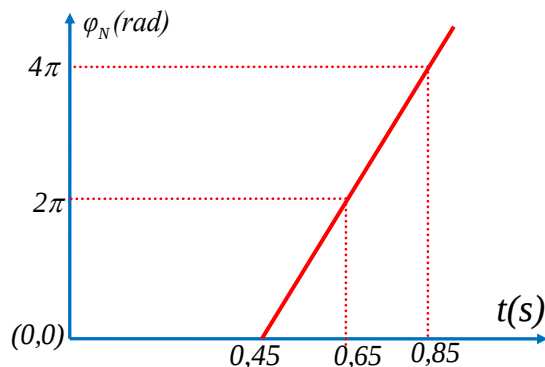
γ) Η φάση του Ν $\varphi_N(t) = 10\pi t - 4,5\pi$ και η εξίσωση ταλάντωσης αυτού

$$y_N(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4,5\pi)$$

ισχύουν για $t \geq 0,45\text{s}$ που το κύμα φθάνει στο Ν και αρχίζει η



ταλάντωσή του.



δ) Η χρονική στιγμή $t = 0,70s$ αντιστοιχεί σε χρόνο μετά την $t_1 = 0,45s \dots$

$\Delta t = 0,25s \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{0,25s}{0,20s} \Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{5}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{5T}{4}$. Στον επιπλέον αυτόν χρόνο το κύμα έχει προχωρήσει κατά πέρα από το Ν κατά $\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta x = v \frac{5T}{4} \Rightarrow \Delta x = \frac{5\lambda}{4}$ και έχει φθάσει σε ένα άλλο σημείο Π.

Μέσα στον χρόνο $\Delta t = \frac{5T}{4} = 0,25s$ η φάση των σημείων Κ, Λ, Μ, Ν έχει

αυξηθεί κατά $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \frac{5T}{4} \Rightarrow \Delta\varphi = 2,5\pi \text{ rad}$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται για την χρονική στιγμή $t = 0,70s$ η φάση των σημείων Κ, Λ, Μ, Ν, Π και η θέση αυτών ως προς το σημείο Κ.

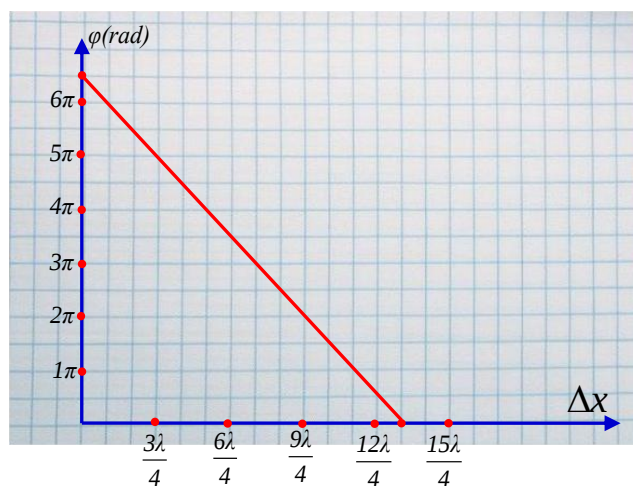
Σημείο	Κ	Λ	Μ	Ν	Π
Φάση την $t=0,70s$	$6,5\pi$	5π	$3,5\pi$	$2,5\pi$	0
Θέση ως προς το Κ	0	$\frac{3\lambda}{4}$	$\frac{6\lambda}{4}$	$\frac{8\lambda}{4}$	$\frac{13\lambda}{4}$

Η φάση των διαφόρων σημείων σε σχέση με την απόσταση Δx από το Κ θα

είναι $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow$

$\varphi_K - \varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow$

$\varphi = 6,5\pi - 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$



ε) Την χρονική στιγμή $t = 0,70s$ τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, Π θα έχουν απομάκρυνση...

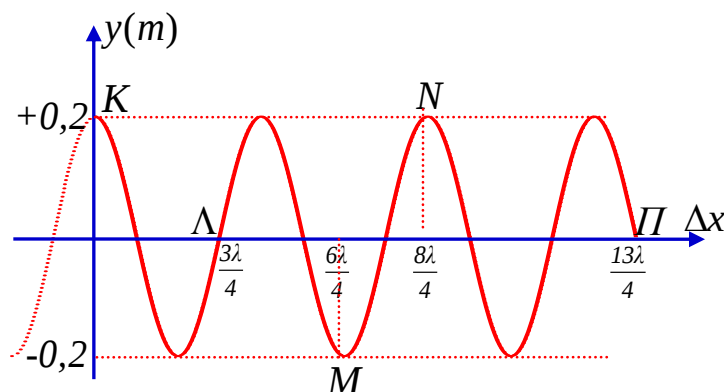
$$y_K = 0,2\eta\mu(\varphi_K) \Rightarrow y_K = 0,2\eta\mu(6,5\pi) \Rightarrow y_K = +0,2m$$

$$y_\Lambda = 0,2\eta\mu(\varphi_\Lambda) \Rightarrow y_\Lambda = 0,2\eta\mu(5\pi) \Rightarrow y_\Lambda = 0m$$

$$y_M = 0,2\eta\mu(\varphi_M) \Rightarrow y_M = 0,2\eta\mu(3,5\pi) \Rightarrow y_M = -0,2m$$

$$y_N = 0,2\eta\mu(\varphi_N) \Rightarrow y_N = 0,2\eta\mu(2,5\pi) \Rightarrow y_N = 0,2m$$

$$y_\Pi = 0$$



στ) Αν προσέξουμε το στιγμιότυπο κύματος το Ρ τη χρονική στιγμή $t = t_1 = 0,45s$ έχει απομάκρυνση $y_P = +0,1m$ και ταχύτητα αρνητική $v < 0$ (κινείται όπως τα αμέσως προηγούμενα μόρια...).

Η γενική εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Ρ θα είναι $y_P(t) = A\eta\mu[\omega(t - t')]$

$$\Rightarrow y_P(t) = 0,2\eta\mu[10\pi(t - t')] \xrightarrow{t=0,45s}$$

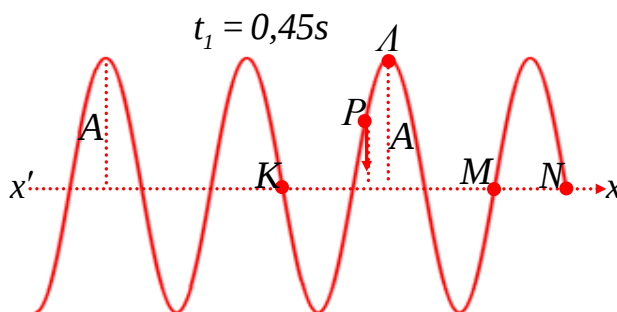
$$\Rightarrow +0,1 = 0,2\eta\mu(10\pi \cdot 0,45 - 10\pi t') \Rightarrow \eta\mu(4,5\pi - 10\pi t') = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$4,5\pi - 10\pi t' = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \text{ή} \quad 4,5\pi - 10\pi t' = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (2) \quad \text{δεκτή η (2) διότι}$$

αυτή δίνει αρνητική ταχύτητα. Το Ρ όμως είναι στη θέση αυτή ($y = +0,1m$ με αρνητική ταχύτητα) για δεύτερη φορά ... άρα $k=0, 1$ οπότε από την (2)

$$\text{παίρνουμε...} \quad 4,5\pi - 10\pi t' = 2 \cdot 1 \cdot \pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t' = \frac{1}{6}s \quad \text{άρα η εξίσωση}$$

$$y_P(t) = A\eta\mu[\omega(t - t')] \text{ γράφεται } y_P(t) = 0,2\eta\mu\left[10\pi\left(t - \frac{1}{6}\right)\right] \Rightarrow$$



$$y_p(t) = 0,2\eta\mu\left[10\pi t - \frac{5\pi}{3}\right] (S.I).$$

ζ) Για να ισχύει η εξίσωση αυτή πρέπει το κύμα να έχει θετική ταχύτητα διάδοσης (...έχει...) και η αρχή $O(x=0)$ να αρχίσει να ταλαντώνεται την $t=0$ με θετική ταχύτητα ταλάντωσης (το $v_{\omega} > 0$ ισχύει).

Από τα δεδομένα όμως του προβλήματος δεν φαίνεται που είναι η αρχή και πότε αρχίζει να ταλαντώνεται... άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή την εξίσωση. Για να ισχύει αυτή η εξίσωση πρέπει αυθαίρετα να θέσουμε ($x=0$) στο σημείο O του σχήματος που αρχίζει να ταλαντώνεται την $t=0$

