

Αρχική φάση κύματος

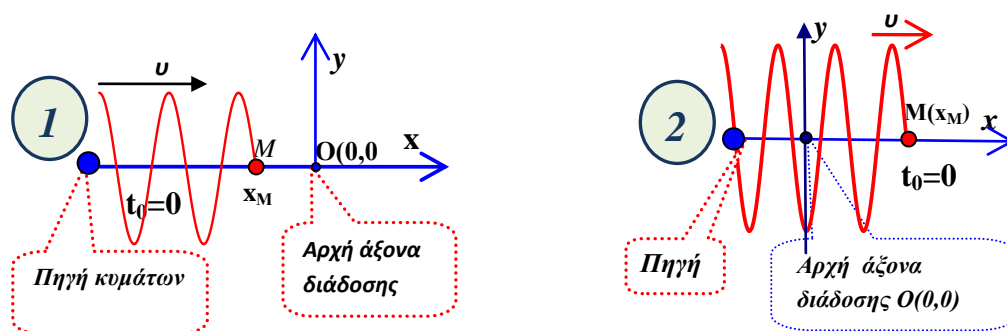
Αρχική φάση κύματος έχουμε, όταν η αρχή $O(x=0)$ του άξονα διάδοσης του κύματος έχει αρχική φάση ταλάντωσης.

Αυτό μπορεί να συμβεί σε εξής περιπτώσεις:

1. Όταν η αρχή $O(x=0)$ του άξονα διάδοσης του κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται με θετική ταχύτητα ταλάντωσης σε χρονική στιγμή $t_1 \neq 0$, οπότε θα έχει εξίσωση ταλάντωσης $y_o(t) = A\eta\mu[\omega(t-t_1)]$. Πρακτικά αυτό γίνεται όταν το κύμα,

- την $t=0$ δεν έχει φθάσει στην θέση $O(x=0)$, οπότε η αρχή θα αρχίζει να ταλαντώνεται αργότερα σε χρονική στιγμή $t_1 > 0$ ή
- την $t=0$ έχει περάσει από την θέση $O(x=0)$, οπότε η αρχή έχει αρχίσει ήδη να ταλαντώνεται σε χρονική στιγμή $t_1 < 0$.

Στις περιπτώσεις αυτές η εξίσωση του κύματος- αν έχει θετική ταχύτητα διάδοσης - θα είναι $y(x,t) = A\eta\mu\left(\omega(t-t_1) - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$.



Στο σχήμα (1) η αρχή $O(x=0)$ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{|x_M|}{v} > 0$ και η εξίσωση του κύματος είναι $y(x,t) = A\eta\mu\left(\omega\left(t - \frac{|x_M|}{v}\right) - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ ή

$$y(x,t) = A\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right) \text{ με } \varphi = -\omega \frac{|x_M|}{v} < 0.$$

Επίσης στο σχήμα (2) η αρχή $O(x=0)$ αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = -\frac{x_M}{v} < 0$ και η εξίσωση του κύματος είναι

$$y(x,t) = A\eta\mu\left(\omega\left(t + \frac{x_M}{v}\right) - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \text{ ή } y(x,t) = A\eta\mu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right) \text{ με } \varphi = \omega \frac{x_M}{v} > 0.$$

2. Όταν η αρχή $O(x=0)$ του άξονα διάδοσης του κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται την $t_0 = 0$ με αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης $v_{\omega\lambda} < 0$ οπότε θα

έχει εξίσωση ταλάντωσης $y = A\eta\mu(\omega t + \pi)$. Τώρα αν το κύμα διαδίδεται προς τα θετικά θα έχει εξίσωση $y(x,t) = A\eta\mu(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \pi)$ (σχήματα 3 και 5)

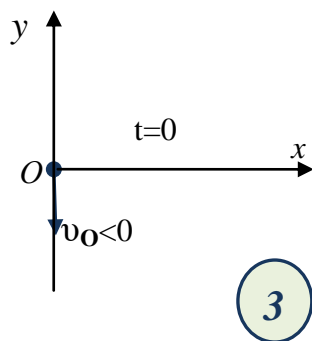
Παρατηρήσεις:

☞ Αρχική φάση $\varphi_0 = \pi$ μπορεί το κύμα να έχει σε δύο περιπτώσεις:

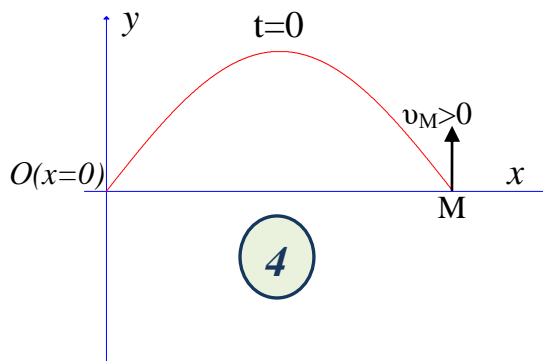
- α) στην ανωτέρω περίπτωση που η αρχή $O(x=0)$ του άξονα διάδοσης του κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται την $t_0 = 0$ με αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης $v_{\omega\lambda} < 0$ και το κύμα τότε αρχίζει να διαδίδεται (σχήμα 3), και
- β) όταν η αρχή $O(x=0)$ του άξονα διάδοσης του κύματος έχει αρχίζει να ταλαντώνεται την $t_0 = -T/2$ με θετική ταχύτητα ταλάντωσης $v_{\omega\lambda} > 0$ και το κύμα την $t = 0$ έχει ήδη διαδοθεί κατά $\lambda/2$ (σχήμα 4).

☞ Όταν η αρχή $O(x=0)$ του άξονα διάδοσης του κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται την $t_0 = 0$ με αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης $v_{\omega\lambda} < 0$ τότε

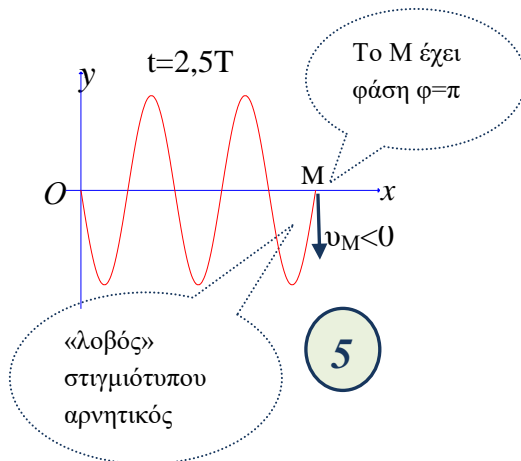
- α) Ο τελευταίος λοβός του στιγμιότυπου κύματος είναι αρνητικός.
 - β) Κάθε μόριο τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται έχει φάση $\varphi = \pi$ (!!!).
- (βλέπε σχήμα 5)



Στο σχήμα η αρχή $O(x=0)$ άρχισε τη ταλάντωση την $t=0$ με αρνητική ταχύτητα ($v_{\omega\lambda} < 0$). Το κύμα τώρα αρχίζει να δημιουργείται, χωρίς να έχει διαδοθεί. Στη περίπτωση αυτή το κύμα έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \pi$.



Στο σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο του κύματος την $t=0$. Το κύμα έχει διαδοθεί κατά $\lambda/2$, η δε αρχή άρχισε τη ταλάντωση την $t = -T/2$ με θετική ταχύτητα ταλάντωσης. Και εδώ η φάση του κύματος είναι π .



Στο κύμα του σχήματος η αρχή $O(x=0)$ άρχισε τη ταλάντωση την $t=0$ με αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης ενώ το M αρχίζει την ταλάντωση την $t=2,5T$ επίσης με αρνητική ταχύτητα ταλάντωσης. Το κύμα έχει αρχική φάση π . Η φάση του M την $t=2,5T$, μόλις αρχίζει την ταλάντωση είναι $\varphi_M=\pi$ (!!!).

Εφαρμογή. Πάνω σε μια χορδή διαδίδεται με θετική ταχύτητα διάδοσης $v = 2m/s$ εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Κάθε σημείο της χορδής σε χρόνο $t = 10s$ διαγράφει $N=50$ ταλαντώσεις και διανύει μήκος τροχιάς $s = 40m$.

Ως αρχή μετρήσεων του άξονα διάδοσης $O(x=0)$ θεωρούμε την αρχή της χορδής και ως αρχή χρόνων $t=0$ τη στιγμή που το κύμα έφθασε στην θέση $M(x_M = +0,8m)$.

α) Να γραφεί η εξίσωση κύματος $y(x,t)$.

β) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις των σημείων $O(x=0)$ και $M(x_M = +0,8m)$.

γ) Να γίνει το στιγμιότυπο του κύματος την $t = 0,45s$.

Απάντηση:

Η συχνότητα κύματος είναι ίση με τη συχνότητα ταλάντωσης κάθε μορίου

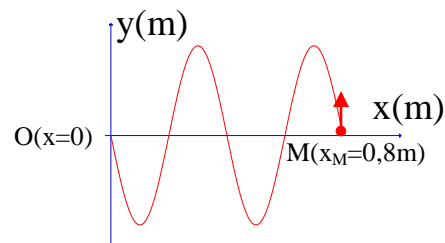
$$f = \frac{N}{t} = \frac{50 \text{ ταλαντώσεις}}{10 \text{ s}} \rightarrow \boxed{f = 5\text{Hz}}$$

$$\text{σημειώνουμε } s = N \cdot \lambda \Rightarrow 40m = 50 \cdot \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 0,8m}, \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2m/s}{5\text{Hz}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0,4m}$$

α) Εδώ είναι προφανές ότι υπάρχει αρχική φάση, οπότε η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή

$$y(x,t) = A \eta \mu \left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi \right) \Rightarrow$$

$y(x,t) = 0,2 \eta \mu (10\pi t - 5\pi x + \varphi)$. Η αρχική φάση φ θα βρεθεί από τις αρχικές συνθήκες.



Έτσι για $M(x_M = +0,8m)$ η εξίσωση ταλάντωσης του M είναι $y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x_M + \varphi) \xrightarrow{x_M=0,8m} y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 4\pi + \varphi)$. Το M όμως αρχίζει να ταλαντώνεται την $t = 0$, οπότε η φάση του είναι μηδέν.

$$\varphi_M = (10\pi t - 4\pi + \varphi) \xrightarrow[\varphi_M=0]{t=0} 0 = -4\pi + \varphi, \text{ άρα } \varphi = 4\pi.$$

Έτσι η εξίσωση κύματος είναι $y(x,t) = 0,2\eta\mu(10\pi t - 5\pi x + 4\pi)$

β) Για $x=0$ $y_o(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t + 4\pi)$ και για $x=0,8m$ $y_M(t) = 0,2\eta\mu(10\pi t)$

αναμενόμενο (αν θυμηθούμε τη πρόταση (α)).

Αν θέλουμε τώρα να βρούμε πότε αρχίζει να ταλαντώνεται η αρχή αρκεί να θέσουμε $\varphi_o(t) = 0 \Rightarrow 10\pi t + 4\pi = 0 \Rightarrow t = -0,4s$

γ) Εξίσωση του στιγμιότυπου για $t = 0,45s$, $y(x) = 0,2\eta\mu(4,5\pi - 5\pi x + 4\pi)$ ή $y(x) = 0,2\eta\mu(8,5\pi - 5\pi x)$. Το κύμα εκείνη τη στιγμή $t = 0,45s$ φθάνει εκεί όπου

$$(8,5\pi - 5\pi x) = 0 \Rightarrow x = 1,7m \dots \frac{x}{\lambda} = \frac{1,7m}{0,4m} = 4,25 \dots x = 4,25\lambda \text{ ή } x = 4\lambda + \frac{1}{4}\lambda.$$

Πιο απλή εξίσωση του στιγμιότυπου $y(x) = 0,2\eta\mu(0,5\pi - 5\pi x)$ ή $y(x) = 0,2\sigma\upsilon\upsilon(-5\pi x)$ $y(x) = 0,2\sigma\upsilon\upsilon(5\pi x)$

