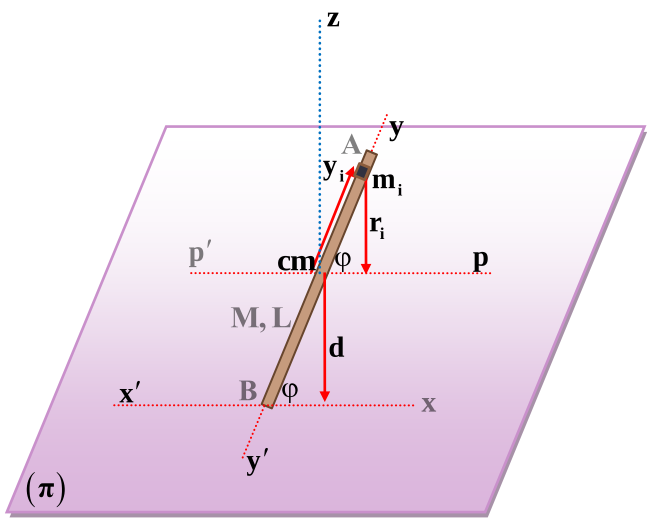
Ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα που είναι στο ίδιο επίπεδο με την ράβδο και σχηματίζει γωνία με αυτή.

Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ομογενούς κυλινδρικής ράβδου ΑΒ μάζας Μ και μήκους L ως προς άξονα $x'x$ που διέρχεται από το ένα άκρο Β της ράβδου, σχηματίζει γωνία φ με την ράβδο και ανήκει στο ίδιο επίπεδο με αυτή. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας λεπτής κυλινδρικής ομογενούς ράβδου μάζα Μ και μήκους L ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου και είναι κάθετος στην ράβδο $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$.



Απάντηση

Έστω μια ράβδος ΑΒ μάζας Μ και μήκους L που είναι πάνω σε οριζόντιο επίπεδο (π). Η ροπή αδράνειας της ράβδου αυτής ως προς άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας της cm και είναι κάθετος στην ράβδο έχει εξίσωση ορισμού $I_{z,cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2$ όπου m_i μια στοιχειώδης μάζα της ράβδου και y_i η απόσταση αυτής από τον άξονα $z'z$. Ναι αλλά δίνεται $I_{z,cm} = \frac{1}{12}ML^2$… άρα $\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2 = \frac{1}{12}ML^2$ (1).

Η ροπή αδράνειας της ράβδου αυτής ως προς άξονα $p'p$ που διέρχεται από το κέντρο μάζας της cm και είναι στο ίδιο επίπεδο (π) με την ράβδο έχει εξίσωση ορισμού $I_{p,cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ $\xrightarrow{r_i = y_i ημφ}$ $I_{p,cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2 ημ^2φ$ και επειδή η γωνία φ είναι ίδια για όλα τα m_i και y_i της ράβδου , έχουμε $I_{p,cm} = ημ^2φ \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2 \xrightarrow{(1)} I_{p,cm} = ημ^2φ \frac{1}{12}ML^2$ ή $\mathbf{I_{p,cm} = \frac{1}{12}ML^2 ημ^2φ}$ (2)

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι παράλληλος με τον $p'p$ και αυτός διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου , για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας ως προς τον άξονα $x'x$ εφαρμόζουμε το θεώρημα Steiner των παραλλήλων αξόνων… $I_x = I_{p,cm} + Md^2$ (3). Από το σχήμα έχουμε $d = \frac{L}{2}ημφ$ (3) …έτσι από (1,2,3) παίρνουμε $I_x = \frac{1}{12}ML^2ημ^2φ + M\frac{L^2}{4}ημ^2φ$ ή

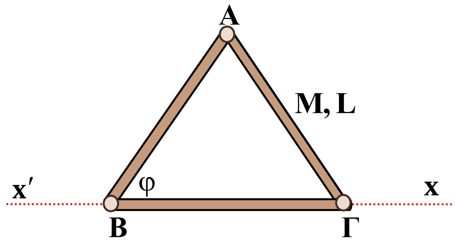
Βασίλης Τσούνης www.btsounis.gr mail@btsounis.gr

$$I_x = \frac{1}{12}ML^2\eta\mu^2\varphi + \frac{3}{12}ML^2\eta\mu^2\varphi \;\; \acute{\eta} \;\; I_x = \frac{4}{12}ML^2\eta\mu^2\varphi \;\; \acute{\eta} \;\; \mathbf{I_x = \frac{1}{3}ML^2\eta\mu^2\varphi} \;\; (4)$$

Σχόλιο: Αν $\varphi = 90^0$ δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι κάθετος στην ράβδο και διέρχεται από το ένα άκρο της θα έχουμε $I_x = \frac{1}{3}ML^2$ [… σας λέει κάτι η σχέση αυτή;]

Εφαρμογή

Τρείς όμοιες λεπτές κυλινδρικές ομογενείς ράβδοι με μάζα M και μήκος L είναι συνδεδεμένες ακλόνητα στα άκρα τους ώστε να συνιστούν ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ όπως στο σχήμα. Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του ανωτέρω τριγώνου των ράβδων ως προς άξονα $x'x$ που ταυτίζεται μία ράβδο ΒΓ του τριγώνου. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας λεπτής κυλινδρικής ομογενούς ράβδου μάζα M και μήκους L ως προ άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της ράβδου και είναι κάθετος στην ράβδο $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$



Απάντηση

Για την ροπή αδράνειας του συστήματος των τριών ράβδων έχουμε

$I_x = I_{AB,x} + I_{A\Gamma,x} + I_{B\Gamma,x}$ (5) .

Από την προηγούμενη όμως μελέτη έχουμε $I_{AB,x} = I_{A\Gamma,x} = \frac{1}{3}ML^2\eta\mu^2\varphi \xrightarrow{\varphi=\pi/3}$

$$I_{AB,x} = I_{A\Gamma,x} = \frac{1}{3}ML^2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \;\; \acute{\eta} \;\; I_{AB,x} = I_{A\Gamma,x} = \frac{1}{3}ML^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \;\; \acute{\eta} \;\; I_{AB,x} = I_{A\Gamma,x} = \frac{1}{4}ML^2 \;\; (6)$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ΒΓ ως προς άξονα $x'x$ έχει εξίσωση ορισμού $I_x = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2$

όπου m_i μια στοιχειώδης μάζα της ράβδου και x_i η απόσταση αυτής από τον άξονα $x'x$ …που όμως είναι $x_i = 0$, άρα $I_{B\Gamma,x} = 0$ (7) .

Έτσι από τις (5,6,7) έχουμε $I_x = \frac{1}{4}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 + 0$ ή $\mathbf{I_x = \frac{1}{2}ML^2}$