

10.7.4 Ένα «διπλό άστρο» σε κυκλική κίνηση.

Δίνεται ένα σύστημα δύο αστέρων με μάζες $m=10^{24}$ Kg και $2m$ με τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση $r=20,01 \cdot 10^{15}$ m και να εκτελούν κυκλικές κινήσεις ίδιας περιόδου γύρω από το ίδιο κέντρο O της διακέντρου με την δράση της μεταξύ τους βαρυτικής αλληλεπίδρασης. Να υπολογισθούν

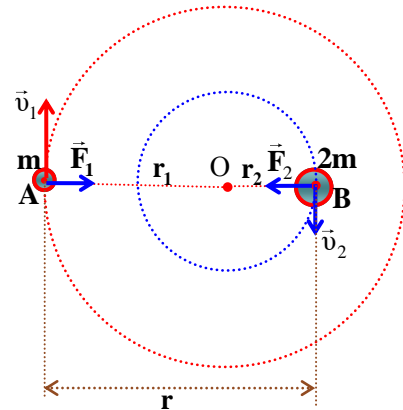
α. Οι ακτίνες των κυκλικών κινήσεων των δύο αστέρων.

β. Η περίοδος των κυκλικών κινήσεων.

γ. Η κινητική ενέργεια κάθε άστρου.

δ. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο αστέρων. Δίνεται $G=6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{Kg}^2}$ και ότι το

διπλό αυτό άστρο δεν αλληλεπιδρά με άλλα άστρα του σύμπαντος.



Απάντηση:

α. Οι δυνάμεις βαρυτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των άστρων είναι $F_1 = F_2 = G \frac{2mm}{r^2}$ (1) . Η

δύναμη \vec{F}_1 είναι κεντρομόλος για το άστρο A και η δύναμη \vec{F}_2 είναι κεντρομόλος για το άστρο B... $F_1 = m\omega^2 r_1$ (2) και $F_2 = 2m\omega^2 r_2$ (3) και λόγω της (1) $m\omega^2 r_1 = 2m\omega^2 r_2$ ή

$r_1 = 2r_2$ (4) . Από το σχήμα $r_1 + r_2 = r \xrightarrow{(4)} 3r_2 = r$ ή $r_2 = \frac{r}{3} \xrightarrow{\text{S.I.}} r_2 = 6,67 \cdot 10^{15} \text{ m}$ και

$r_1 = 2r_2$ ή $r_1 = \frac{2r}{3}$ ή $r_1 = 13,34 \cdot 10^{15} \text{ m}$

β. Από (1) και (3) έχουμε $G \frac{2mm}{r^2} = 2m\omega^2 r_2 \xrightarrow{(r_2=r/3)} G \frac{m}{r^2} = \omega^2 \frac{r}{3}$ ή $\omega = \sqrt{\frac{3Gm}{r^3}} \xrightarrow{\text{S.I.}}$

$\omega = \frac{10^{-16} \text{ rad}}{20,01 \text{ s}}$ και η περίοδος $T = \frac{2\pi}{\omega} \xrightarrow{\text{S.I.}} T = 40,02\pi \cdot 10^{16} \text{ s}$.

γ. Η κινητική ενέργεια του άστρου A είναι $K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ ή $K_1 = \frac{1}{2} m (\omega r_1)^2$ ή

$K_1 = \frac{1}{2} m \frac{3Gm}{r^3} \frac{4r}{9}$ ή $K_1 = \frac{2}{3} \frac{Gm^2}{r} \xrightarrow{\text{S.I.}} K_1 = \frac{2}{9} \cdot 10^{22} \text{ J}$

Ομοίως η κινητική ενέργεια του άστρου B είναι $K_2 = \frac{1}{2} 2m v_2^2$ ή $K_2 = \frac{1}{2} 2m (\omega r_2)^2$ ή

$K_2 = \frac{1}{2} 2m \frac{3Gm}{r^3} \frac{r}{9}$ ή $K_2 = \frac{1}{3} \frac{Gm^2}{r} \xrightarrow{\text{S.I.}} K_2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{22} \text{ J}$

δ. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι $E = K_1 + K_2 + U$ ή

$E = \frac{2}{3} \frac{Gm^2}{r} + \frac{1}{3} \frac{Gm^2}{r} - \frac{G2m^2}{r}$ ή $E = -\frac{Gm^2}{r}$ ή $E = -\frac{1}{3} \cdot 10^{22} \text{ J}$