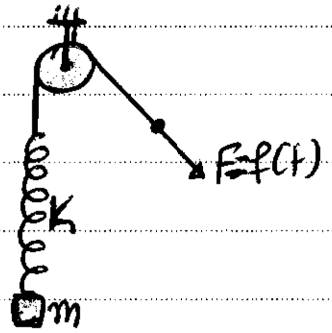
3. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Α. Ερωτήσεις κλειστού τύπου.

3.1



$D=K=m\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow 2\pi f_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$

$\Rightarrow f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

$f=f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ μόνο στην περίπτωση του συντονισμού. Σε κάθε άλλη περίπτωση $f_\tau=f_{διεγέρτη} \Rightarrow f_\tau=f$

Άρα σωστή η σχέση (δ)

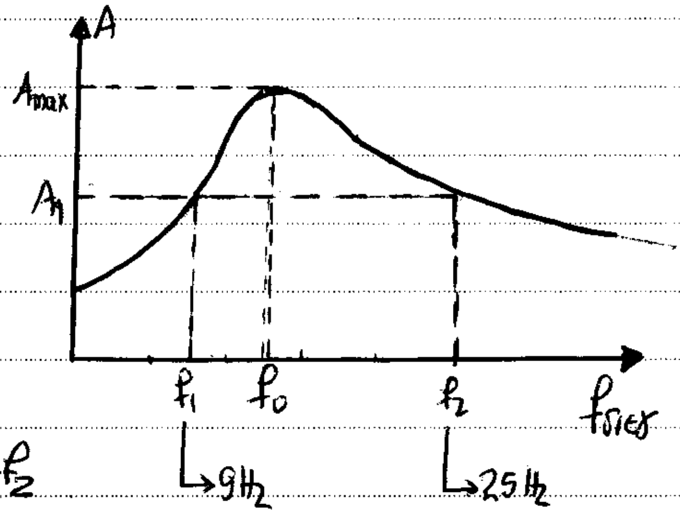
3.2 α. Το πλάτος για δεδομένη συχνότητα διεγέρτη παραμένει σταθερό, άρα α- λάθος

β. $f_{ταλάντωσης}=f_{διεγέρτη}$, $f_{ταλάντωσης}=f_0$ (ιδιοσυχνότητα) μόνο στην κατάσταση του συντονισμού, β-λάθος

γ. $\vec{F}_{διεγέρτη}=-\vec{F}_{αποσβέσεων}$ μόνο στο συντονισμό και στη θέση $x=0$, γ-λάθος

δ. $W_{διεγέρτη}$ (ανά περίοδο) $=|W_{αποσβέσεων}|$ (ανά περίοδο) δ-σωστό

3.3



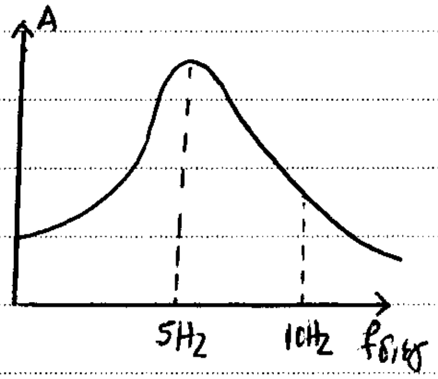
Από την καμπύλη συντονισμού και σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος φαίνεται ότι το ίδιο πλάτος το έχουμε για δύο συχνότητες f_1 και f_2 εκατέρωθεν της f_0, $f_1<f_0<f_2$

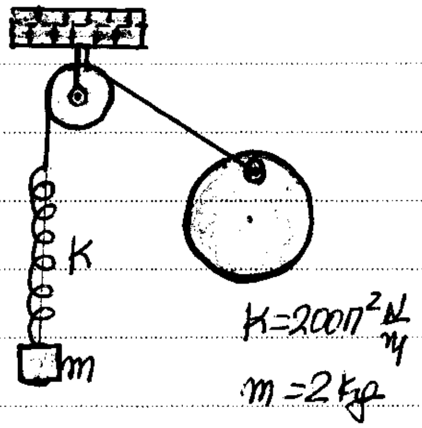
Για την άσκηση $f_1=9Hz<f_0<f_2=25Hz$ (1)

Από τα δεδομένα του προβλήματος μόνο η $f_0=12Hz$ πληροί την συνθήκη (1)

Άρα σωστή η (γ)

3.4





$T_{διεγέρτη} = 0{,}10 s$

$\omega_{διεγ} = \frac{2\pi}{T_{διεγ}} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi \frac{rad}{s} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\pi f_{διεγ} = 20\pi \Rightarrow f_{διεγ} = 10Hz$

$D = K = m\omega_0^2 \Rightarrow 200\pi^2 = 2\omega_0^2$

$\Rightarrow \omega_0 = 10\pi \frac{rad}{s} \Rightarrow 2\pi f_0 = 10\pi \Rightarrow f_0 = 5Hz$

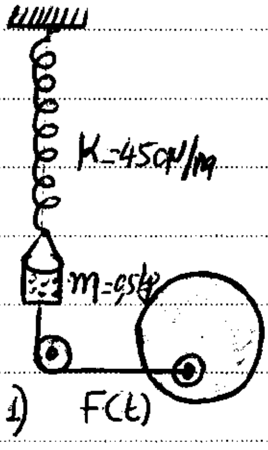
Όταν η $T_{διεγ}$ αυξάνεται η $f_{διεγ}$ μειώνεται ... και από την καμπύλη συντονισμού παρατηρούμε όταν η συχνότητα μειώνεται από $f_{διεγ} = \frac{1}{T_{διεγ}} = \frac{1}{0{,}1}$ ... $f_{διεγ} = 10Hz$ και μέχρι $f_{διεγ} = f_0 = 5Hz$ το πλάτος αυξάνεται και όταν η $f_{διεγ}$ μειώνεται κάτω από 5Hz το πλάτος μειώνεται

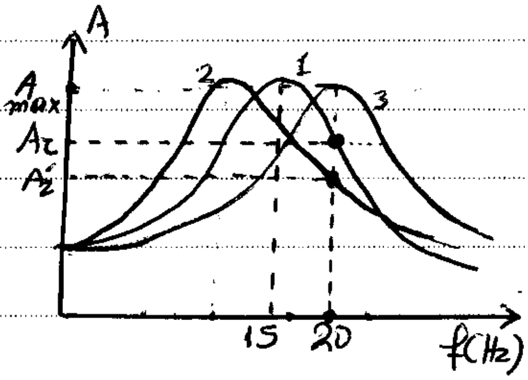
Άρα σωστή η πρόταση (δ)

3.5

α-σωστό β-σωστό γ-λάθος δ-λάθος

3.6





$D = K = m\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{450\pi^2}{0{,}5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_0 = 30\pi \Rightarrow 2\pi f_0 = 30\pi \Rightarrow f_0 = 15Hz$

$f_{διεγ} = \frac{N}{t} = \frac{1200}{60} = 20Hz$

α) Άρα $f_{διεγ} \neq f_0$ πρακτικά το σύστημα δεν είναι συντονισμένο άρα α-λάθος (καμπύλη 1)

β) Αν προσθέσουμε βαρίδια η f_0 μειώνεται (καμπύλη 2) και το πλάτος μειώνεται από A_z σε A_z'. άρα β-λάθος

γ) Αν αφαιρούμε βαρίδια η f_0 αυξάνεται το πλάτος αρχικά αυξάνεται (μέχρι η f_0 να γίνει 20Hz) από A_z σε A_{max} και αν η f_0 γίνει μεγαλύτερη από 20Hz το πλάτος μειώνεται και θα γίνει και πάλι A_z

Άρα γ-σωστό, δ-λάθος

3.7

α) $F_{απ} = -0{,}2v$ (S.I), $F_δ = 2συν(50t + \frac{\pi}{3})$ … επειδή το σύστημα είναι συντονισμένο $F_δ = -F_{αn} \Rightarrow 2συν(50t+\frac{\pi}{3}) = 0{,}2v \Rightarrow v = 10συν(50t+\frac{\pi}{3})$ SI

α-λάθος

β) $v_{max} = \omega A \Rightarrow 10 = 50A \Rightarrow A = 0{,}2m$, $x = 0{,}2ημ(50t + \frac{\pi}{3})$ (SI)

β-σωστό

γ) $a_{max} = \omega^2 A = 50^2 \cdot 0{,}2 = 2500 \cdot 0{,}2 = 500 m/s^2$, $a = -500ημ[50t + \frac{\pi}{3}]$ (S.I)

γ-λάθος

δ) $ΣF = ma = m(-\omega^2 x) = -m\omega^2 x = -0{,}1 \cdot 50^2 x \Rightarrow ΣF = -250x$ (S.I)

δ-λάθος

3.8

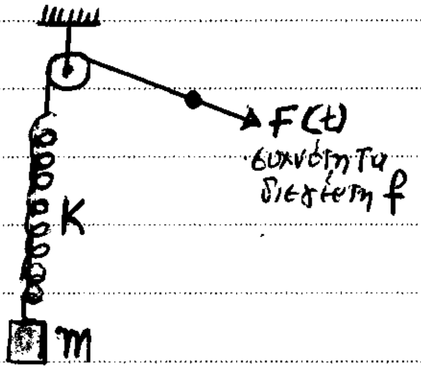
Στην ελεύθερη και αμείωτη ταλάντωση $D = K = m\omega_0^2 \Rightarrow 800 = m \cdot 20^2$

$\Rightarrow 800 = m \cdot 400 \Rightarrow m = 2kg$

$ΣF = ma = m(-\omega^2 x) = -m\omega^2 x = -2 \cdot 30^2 x = -1800x$ (SI) $\Rightarrow ΣF = -1800x$

άρα σωστή η σχέση (β)

3.9



Με μάζα ταλαντωτή m η ιδιοσυχνότητα f_0 είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$.

Σύμφωνα με την άσκηση $f_{διεγ} = 0{,}5 f_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{διεγ} = \frac{0{,}5}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$ (1)

Αλλάζουμε τώρα τη μάζα του ταλαντωτή από m σε m′ και η ιδιοσυχνότητα του συστήματος γίνεται $f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m'}}$ (2)

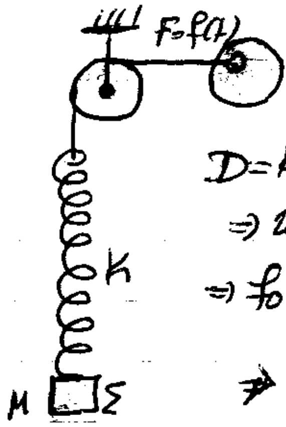
και τώρα είναι συντονισμένο στην $f_{διεγ}$, άρα

$f_{διεγ} = f_0' \overset{(2)}{\Rightarrow} f_{διεγ} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m'}}$ (2′)

Από (2′) και (1) παίρνουμε $\frac{0{,}5}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m'}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{0{,}25}{m} = \frac{1}{m'} \Rightarrow m' = 4m$ Άρα σωστή η σχέση (γ)

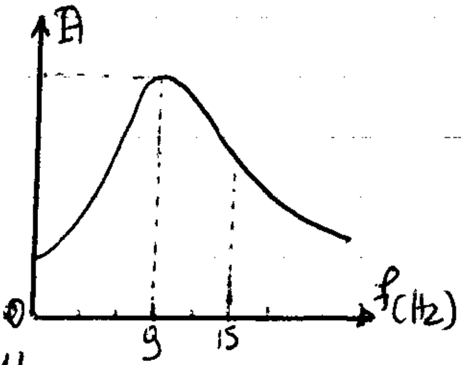
3.10



$D=K=M\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0=\sqrt{K/M} \Rightarrow f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}=9Hz$ (1)

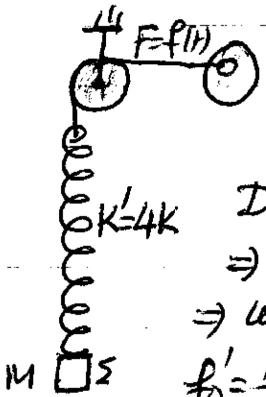
$\Rightarrow f_0=9Hz$

Στην 1η περίπτωση αφού A_{max} έχουμε για $f=9Hz$ σημαίνει ότι η ιδιοσυχνότητα του αρχικού ταλαντωτή είναι $f_0=9Hz \Rightarrow f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}=9Hz$ (1)



Στη δεύτερη περίπτωση η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή γίνεται

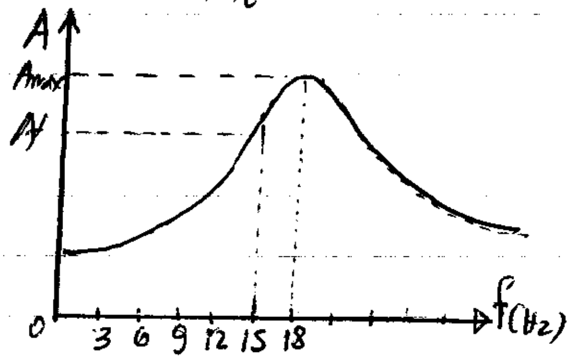
$$f_0'=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4K}{M}}=2\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \xrightarrow{(1)} f_0'=18Hz$$



$D'=K'=M\omega_0'^2 \Rightarrow 4K=M\omega_0'^2 \Rightarrow \omega_0'=\sqrt{\frac{4K}{M}} \Rightarrow f_0'=\frac{1}{2\pi}2\sqrt{\frac{K}{M}} \xrightarrow{(1)}$

$\Rightarrow f_0'=18Hz$

Αν τώρα κάνουμε την νέα καμπύλη συντονισμού γραφικής παράστασης του πλάτους έχουμε στην $f=f_0'=18Hz$.
Επειδή η συχνότητα διεγέρτη είναι $f=15Hz<18Hz$ αρχικά θα έχουμε πλάτος $A'<A_{max}$. και καθώς η f θα μειώνεται κάτω του $15Hz$ παρατηρούμε ότι το πλάτος συνεχώς θα μειώνεται.



Άρα σωστή η πρόταση (α)

3.11

Η κυκλική ιδιοσυχνότητα του συστήματος

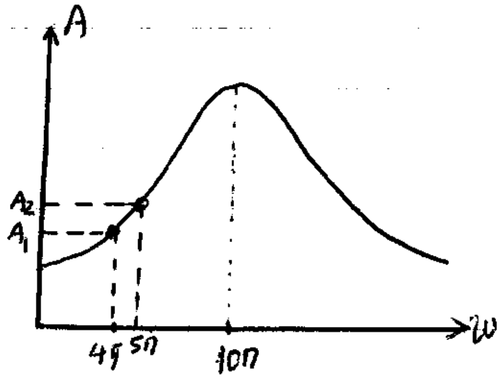
$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{10\pi^2}{0,1}} \Rightarrow \omega_0=10\pi\ rad/s$

$T_1=0,5s \Rightarrow \omega_1=\frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow \omega_1=4\pi\frac{rad}{s}$

$T_2=0,4s \Rightarrow \omega_2=\frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \omega_2=5\pi\frac{rad}{s}$

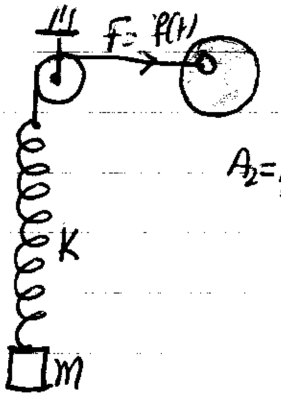
Παρατηρώντας την καμπύλη συντονισμού συμπεραίνουμε ότι $A_1<A_2$

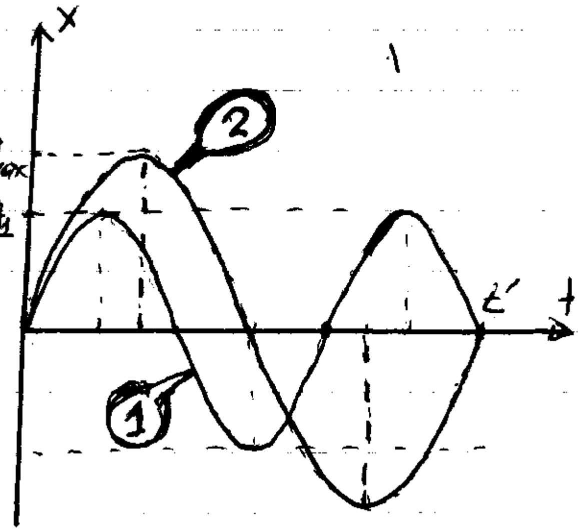
Άρα σωστή η πρόταση (α)



3.12

Ταλάντωση (2) $T_2 = t'$
Ταλάντωση (1) $1,5T_1 = t'$ $\Big\} \Rightarrow$
$T_2 = 1,5T_1 \Rightarrow \frac{1}{f_2} = \frac{1,5}{f_1} \Rightarrow f_1 = 1,5f_2$
$f_1 > f_2$





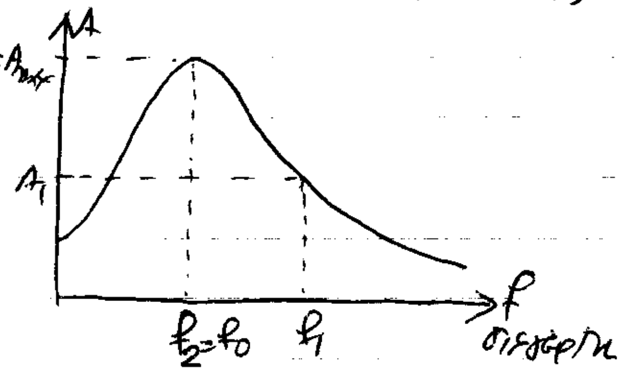
Όταν είχαμε $f_1 \longrightarrow$ ταλάντωση (1)
Όταν είχαμε $f_2 \longrightarrow$ ταλάντωση (2)
↓ συντονισμός
άρα η f_2 γίνεται με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή ... $f_2 = f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$. Για να επιτευχθεί ο συντονισμός έχουμε μέγιστο πλάτος

A) $\pi = \frac{f_2 - f_1}{f_1} 100\% \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi = \frac{f_2 - 1,5f_2}{1,5f_2} 100\% = \frac{-0,5}{1,5} 100\%$

$\Rightarrow \pi = -\frac{50}{1,5}\% \Rightarrow \pi = -\frac{500}{15}\% \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\pi = -\frac{100}{3}\%}$ Άρα σωστή η πρόταση Α.1



B) Τώρα έχουμε συχνότητα διεγέρτη $f_1 = 1,5f_2 = 1,5 \cdot \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_1 = \frac{1,5}{2\pi}\sqrt{k/m}$

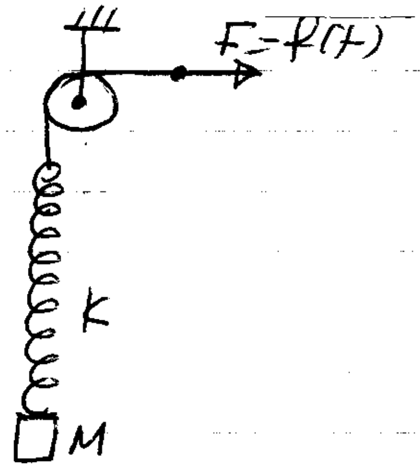
και θέλαμε να συντονίσουμε τον ταλαντωτή σ' αυτή τη συχνότητα. Έτσι μεταβάλλουμε την μάζα από m σε m' έτσι ώστε η ιδιοσυχνότητα f_0' να γίνει ίση με f_1

$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}} = f_1 = \frac{1,5}{2\pi}\sqrt{k/m} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1,5}{2\pi}\sqrt{k/m} \Rightarrow \frac{1}{m'} = \frac{1,5^2}{m}$

$\Rightarrow m' = \frac{m}{1,5^2} \Rightarrow m' = \frac{m}{2,25} \Rightarrow m' = \frac{100}{225}m \Rightarrow m' = \frac{4}{9}m$

$\pi = \frac{m' - m}{m} 100\% = \frac{4/9\, m - m}{m} 100\% \Rightarrow \boxed{\pi = -\frac{500}{9}\%}$ Σωστή η Β.1

3.13



A) Διεγέρτης $F = F_0 συν(20πt)$

Όταν $ω_{διεγέρτη} = ω = 20π \Rightarrow f_{διεγέρτη} = f = 10Hz$
έχουμε,

$u_{max} = ω A_1 \Rightarrow 6π = 20π A_1 \Rightarrow A_1 = 0,3m$

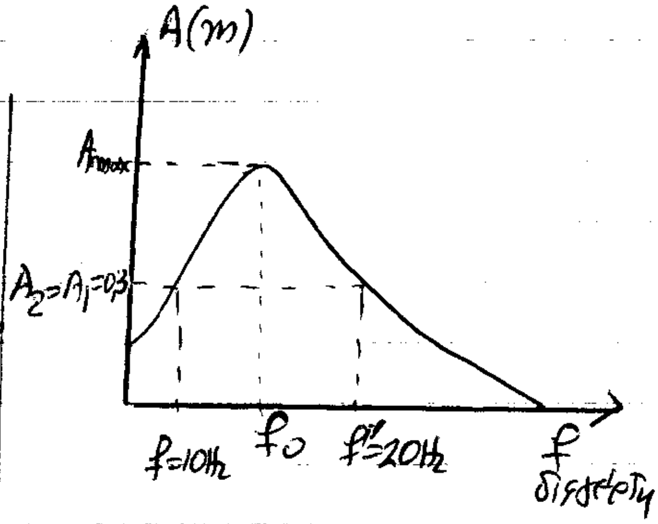
Άρα για $f = 10Hz$ το πλάτος είναι $A_1 = 0,3m$

Όταν $f'_{διεγέρτη} = f' = 20Hz$, έχουμε

$α = ω'^2 A_2' \Rightarrow α = (2πf')^2 A_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 480π^2 = 4π^2 \cdot 400 \cdot A' \Rightarrow A_2 = 0,3m$

!!! Παρατηρούμε ότι έχουμε το ίδιο πλάτος $A_1 = A_2 = 0,3m$ για δύο συχνότητες $f = 10Hz$ και $f' = 20Hz$



Αποτυπώνουμε τα δεδομένα αυτά στην καμπύλη συντονισμού από την οποία παρατηρούμε ότι η συχνότητα του συντονισμού είναι στην περιοχή $10Hz < f_0 < 20Hz$.

Άρα σωστή η πρόταση Α.2

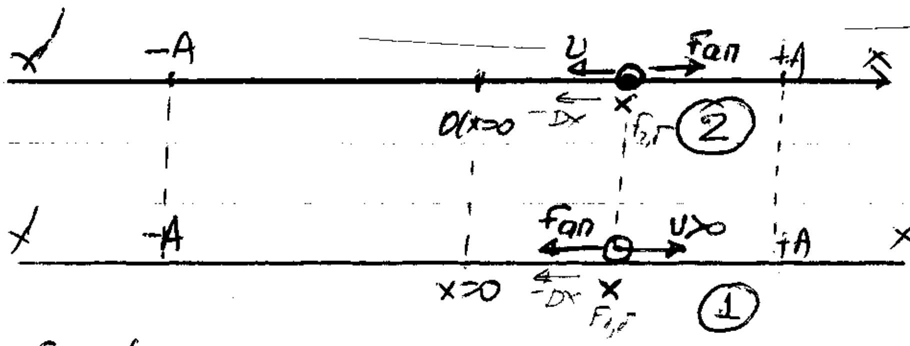
B) $10 < f_0 < 20Hz \Rightarrow 10 < \frac{1}{2π}\sqrt{\frac{K}{M}} < 20 \Rightarrow 100 < \frac{K}{4π^2 M} < 400$

$\Rightarrow 100 < \frac{K}{4 \cdot 10 \cdot 0{,}25} < 400 \Rightarrow 100 < \frac{K}{10} < 400 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1000 < K < 4000 \; (N/m)$

Άρα σωστή η Β.3

3.14



Όταν παρατηρείς στην απομάκρυνση
x>0 είναι σε μια περίοδο
δύο φορές, όπως φαίνονται στα σχήματα (1) και (2)
Η ταλάντωση αυτή είναι εξαναγκασμένη, έτσι και ξέρω
η απομάκρυνση $x = A\eta\mu(\omega t+\varphi)$ οπότε η ταχύτητα
είναι $\upsilon = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi)$
Με απαλοιφή χρόνου παίρνουμε $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$
που σημαίνει ότι και στις δύο περιπτώσεις (1) και (2)
αφού έχουμε την ίδια θέση x, θα έχουμε το ίδιο
μέτρο ταχύτητας. υ ..., άρα και ίδιο μέτρο
της δύναμης απόσβεσης $F_{απ} = b|\upsilon|$

<u>περίπτωση (1)</u>: $\Sigma\vec{F} = -m\omega^2\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{1,διεγ} + \vec{F}_{απ} + \vec{F}_{επαναφοράς} = -m\omega^2\vec{x}$

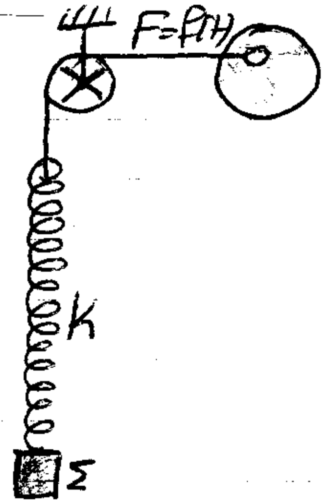
$\Rightarrow F_{1,διεγ} - |F_{απ}| - Dx = -m\omega^2 x \quad (1)$

περίπτωση (2): $\Sigma\vec{F} = -m\omega^2\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_{2,διεγ} + \vec{F}_{απ} + \vec{F}_{επαναφοράς} = -m\omega^2\vec{x}$

$\Rightarrow F_{2,διεγ} + |F_{απ}| - Dx = -m\omega^2 x \quad (2)$

$(2)-(1) \Rightarrow F_{2,διεγ} - F_{1,διεγ} + 2|F_{απ}| = 0 \Rightarrow |F_{απ}| = \dfrac{F_{2,διεγ} - F_{1,διεγ}}{2}$

3.15



Ας βρούμε την ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή

$$f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400}{1/\pi^2}}=\frac{\pi}{2\pi}\cdot 20 \Rightarrow \boxed{f_0=10Hz}$$

A) Όταν $f_{διεγ}=f_1=600\frac{στροφές}{min} \Rightarrow f_1=600\frac{στρ}{60s}$

$\Rightarrow f_1=10Hz$ έχουμε πλάτος A_1

Ναι αλλά $f_1=f_0$ άρα στη συχνότητα αυτή έχουμε συντονισμό άρα το A_1 είναι το μέγιστο πλάτος

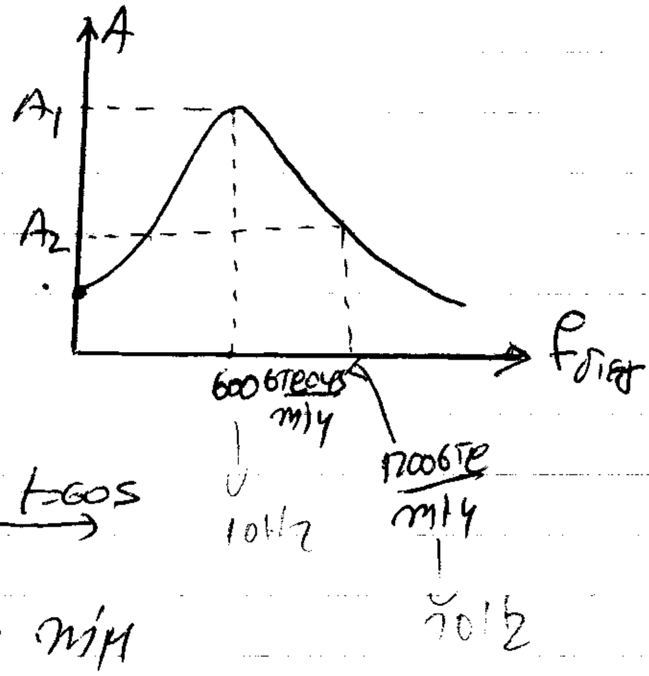
$A_{max}=A_1$ συντονισμός

Σε κάθε άλλη συχνότητα άρα και στην $f_2=1200\frac{στρ}{min}=1200\frac{στρ}{60sec} \Rightarrow f_2=20Hz$ το πλάτος

A_2 προφανώς θα είναι μικρότερο του A_1, $A_2<A_1$

Σωστή η πρόταση Α.3

B) B.1 Σωστή (βλέπε καμπύλη συντονισμού)



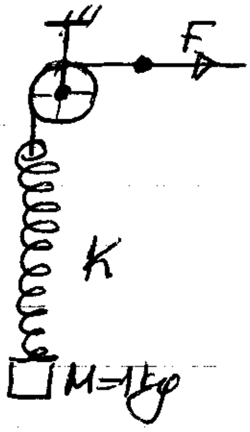
Γ) Αν είχαμε ελεύθερη και αμείωτη ταλάντωση η συχνότητα θα ήταν $f=f_0=10Hz$ και σε 1 min θα είχαμε $N=f_0t=600$ ταλ.

Τώρα έχουμε ελεύθερη αλλά φθίνουσα ταλάντωση με $f'<f_0 \Rightarrow f'<10Hz \Rightarrow f't<10t \xrightarrow{t=60s}$

$\Rightarrow N'<600$ ταλαντώσεις ανά min

Άρα σωστή η Γ.3

3.16



$M=1kg$, $K=\pi^2 N/cm = 100\pi^2 N/m$

$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{M}}=\sqrt{\frac{100\pi^2}{1}} \Rightarrow \omega_0=10\pi\ rad/s \Rightarrow f_0=5Hz$

$F_{απ}=-0{,}2\upsilon\ (SI) \Rightarrow b=0{,}2\,kg\,s^{-1}$

$\upsilon=4\pi\,συν(20\pi t)$ SI.

α) $\left.\begin{matrix}\upsilon=4\pi\,συν(20\pi t)\\ \upsilon=\omega A\,συν(\omega t)\end{matrix}\right\}$ $\underline{\omega_{διεγ}=\omega=20\pi\ rad/s} \Rightarrow 2\pi f=20\pi \Rightarrow \underline{f=10Hz}$

περίοδος $T=\frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{T=0{,}1s}$ $\qquad \omega A=4\pi \Rightarrow 20\pi A=4\pi \Rightarrow \boxed{A=0{,}2m}$

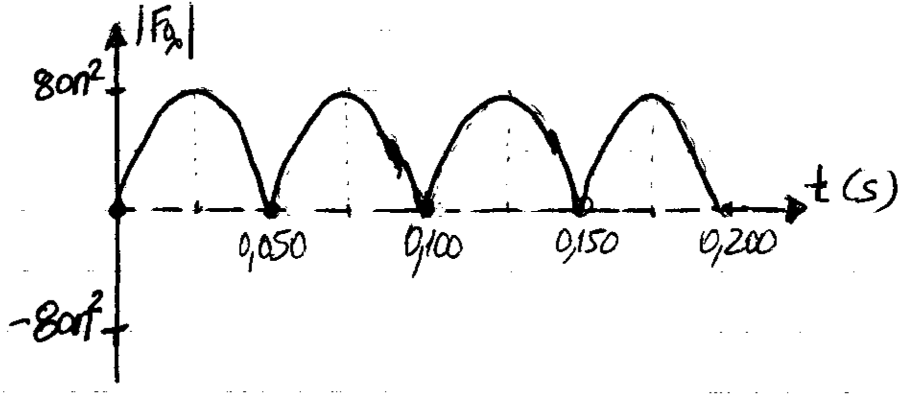
β) $\upsilon=4\pi\,συν(20\pi t) \Rightarrow x=A\,ημ(20\pi t) \Rightarrow x=0{,}2\,ημ(20\pi t)$ (SI)

$\Rightarrow \alpha=-(20\pi)^2\cdot 0{,}2\,ημ(20\pi t) \Rightarrow \alpha=-80\pi^2 ημ(20\pi t)$ (SI)

$\Sigma F=M\alpha \Rightarrow F_{ολ}=1\cdot\left(-80\pi^2 ημ(20\pi t)\right)$ SI $\Rightarrow \underbrace{F_{ολ}=-80\pi^2 ημ(20\pi t)\ SI}_{αρμονική\ μορφή}$

Η χρονική εξίσωση των μέτρων της $F_{ολ}$ είναι

$$\boxed{|F_{ολ}|=80\pi^2|ημ(20\pi t)|\ SI}$$



περίοδος ταλάντωσης
$T=0{,}100s=100ms$

Η περίοδος της
$|F_{ολ}|=f(t)$ είναι
$T'=0{,}050s=50ms$

γ) Ο ταλαντωτής είναι συντονισμένος με εξωτερική δύναμη
$F=0{,}5\pi\,ημ(\omega' t)$ SI.

Άρα $\omega'=\omega_0=2\pi f_0=2\pi\cdot 5Hz \Rightarrow \omega'=10\pi\ rad/s$ ή $\boxed{f'=5Hz}$

δ.2) Αφού έχουμε συντονισμό

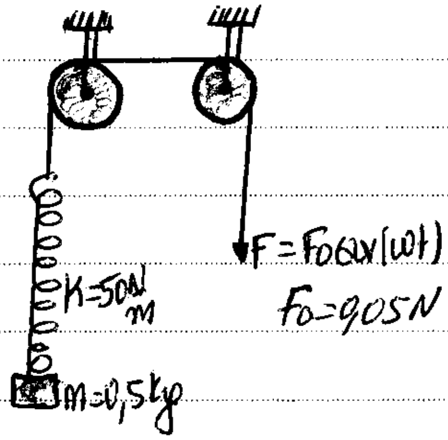
$$\vec{F}_{αν} = -\vec{F}_{διεγέρτη} \Rightarrow -bv = -F \Rightarrow bv = F \Rightarrow 0{,}2v = 0{,}5\pi\,ημ(\omega' t)$$

$$\Rightarrow v = 2{,}5\pi\,ημ(10\pi t)\ (SI) \Rightarrow v = 2{,}5\pi\,συν(10\pi t - \pi/2)\ SI$$

$$v_{max} = \omega' A' \Rightarrow 2{,}5\pi = 10\pi \cdot A' \Rightarrow \boxed{A' = 0{,}25\,m}$$

Άρα $y = A'ημ(10\pi t - \pi/2) \Rightarrow \boxed{y = 0{,}25\,ημ(10\pi t - \pi/2)}$ SI

3.17



A-1) Επειδή το σύστημα είναι συντονισμένο $\omega=\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}=10\,rad/s$

και $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{10}\,s$

A-2) $E=\frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2E}{D}}$

[... συσκευή σε συντονισμό $U_{max}=K_{max}=E$]

$D=m\omega^2=m\omega_0^2=K$

$A=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}25}{50}} \Rightarrow A=0{,}50\,m$ ... στο συντονισμό $F=-F_{αντ} \Rightarrow F=bv \Rightarrow$

$\Rightarrow F_0συν(\omega t)=bv \Rightarrow v=\frac{F_0}{b}συν(\omega t)\ (1)$ ή $v=v_{max}συν(\omega t)\ (2)$

με $F_0=0{,}05N$

Και αλλά $v_{max}=\omega A \xrightarrow[A=0{,}5m]{\omega=10\,rad/s} v_{max}=5\,m/s \xrightarrow{(2)} v=5\,συν(10t)\,(SI)$

... και $x=0{,}5ημ(10t)\ (SI)$

A-3) Από τις (1,2) παίρνουμε $v_{max}=\frac{F_0}{b} \Rightarrow b=\frac{F_0}{v_{max}} \Rightarrow b=\frac{0{,}05N}{5\,m/s}$

$\Rightarrow b=0{,}01\,kg\,s^{-1}$

Άρα $F_{αντ}=-bv$ ή $F_{αντ}=-0{,}01v\ (SI)$

B-1) $A=A_0e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2}=A_0e^{-\Lambda t'} \Rightarrow \frac{1}{2}=e^{-\Lambda t'} \Rightarrow \ln 2=\Lambda t' \Rightarrow 0{,}69=\Lambda t'$

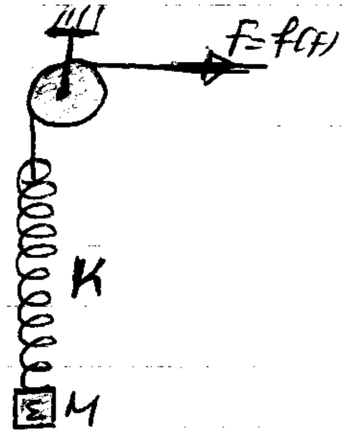
με $\Lambda=\frac{b}{2m}=\frac{0{,}01}{2\cdot 0{,}5} \Rightarrow \Lambda=0{,}01\,s^{-1}$

... άρα $0{,}69=0{,}01t' \Rightarrow t'=69\,s$

B-2) $t'=100T$ ή $T=0{,}69\,s$

3.18

$K = 4\frac{N}{cm} = 400\frac{N}{m}$, $M = 4\,kg$, $F_{αν} = -0{,}2υ\ (SI)$, $F = F_0 συν(20t)$, $A = 0{,}2\,m$



α.1) $\vec{F}_{Ολ} = M\vec{a} \Rightarrow F_{Ολ} = M(-\omega^2 y) \Rightarrow$

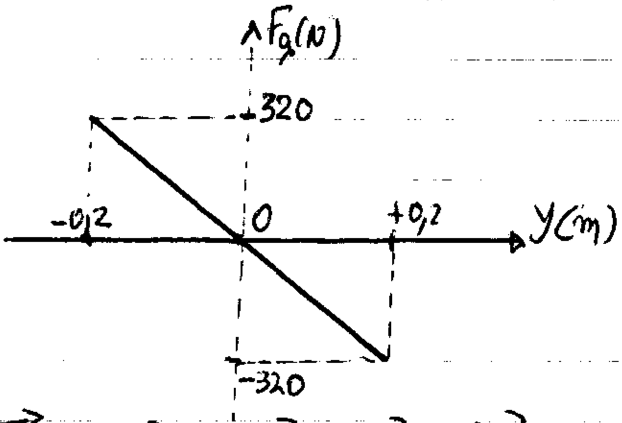
$F_{Ολ} = -M\omega^2 y \Rightarrow F_{Ολ} = -4\cdot 20^2 y$

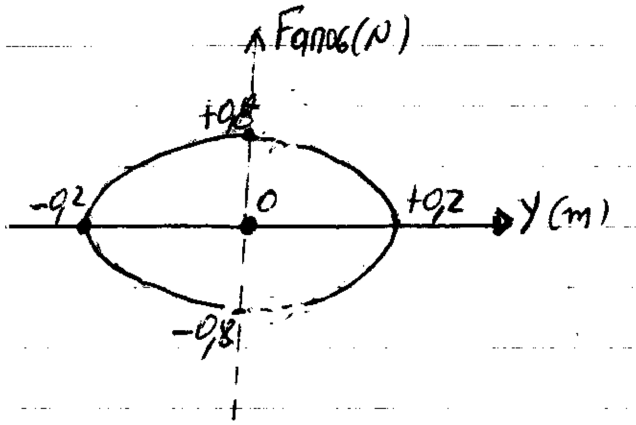
$\Rightarrow \boxed{F_{Ολ} = -1600y}$ με $-0{,}2 \le y \le 0{,}2\,(m)$

α.2) $F_{αν} = -bυ = -b(\pm\omega\sqrt{A^2-y^2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{αν}^2 = b^2\omega^2A^2 - b^2\omega^2y^2 \Rightarrow \left(\frac{F_{αν}}{b\omega A}\right)^2 + \left(\frac{y}{A}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{F_{αν}}{0{,}2\cdot 20\cdot 0{,}2}\right)^2 + \left(\frac{y}{0{,}2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{F_{αν}}{0{,}8}\right)^2 + \left(\frac{y}{0{,}2}\right)^2 = 1}$





β.1) $\vec{F}_{Ολ} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{ελ} + \vec{F}_{αν} + \vec{F}_{διεγ} = M\vec{a} \Rightarrow -Ky - bυ + F_{διεγ} = -M\omega^2 y \Rightarrow$

$\Rightarrow -400y - 0{,}2υ + F_{διεγ} = -1600y \Rightarrow F_{διεγ} = -1200y + 0{,}2υ$ (1)

Για τις ακραίες θέσεις $υ = 0 \Rightarrow F_{διεγ} = -1200(\pm 0{,}2) \Rightarrow F_{διεγ} = \mp 240N$

και κατά μέτρο $\boxed{F_{διεγ} = 240N}$

β.2) Για $y = 0{,}12m$ ⟶ $υ = \pm\omega\sqrt{A^2-y^2} \Rightarrow$

$υ = \pm 20\sqrt{0{,}2^2 - 0{,}12^2} \Rightarrow υ = \pm 3{,}2\,m/s$

$F_{αντ} = -bυ \Rightarrow F_{αν} = -0{,}2(\pm 3{,}2) \Rightarrow F_{αν} = +0{,}64\,N$ ή $F_{αντ} = -0{,}64\,N$

$(1) \Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -1200y + 0,2v \xrightarrow[v=+3,2m/s]{y=+0,12m} F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -143,36N$

$(1) \Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -1100y + 0,2v \xrightarrow[v=-3,2m/s]{y=+0,12m} F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -144,64N$

Άρα στη θέση $y=+0,12m$ αν $v>0 \Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = 143,36N$ (μέτρο)
» » $y=+0,12m$ αν $v<0 \Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = 144,64N$ (μέτρο)

δ) Αφού ο ταλαντωτής είναι συντονισμένος $\omega' = \omega_0 = \sqrt{K/M} \Rightarrow$
$\omega' = 10 rad/s$ και $F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -F_{\alpha\nu} \Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -(-0,2v) \Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = 0,2v$

$\Rightarrow F_0' \sigma\upsilon\nu(\omega_0 t) = 0,2v \Rightarrow v = \frac{F_0'}{0,2} \sigma\upsilon\nu(10t) \Rightarrow v = v_{max} \sigma\upsilon\nu(10t)$

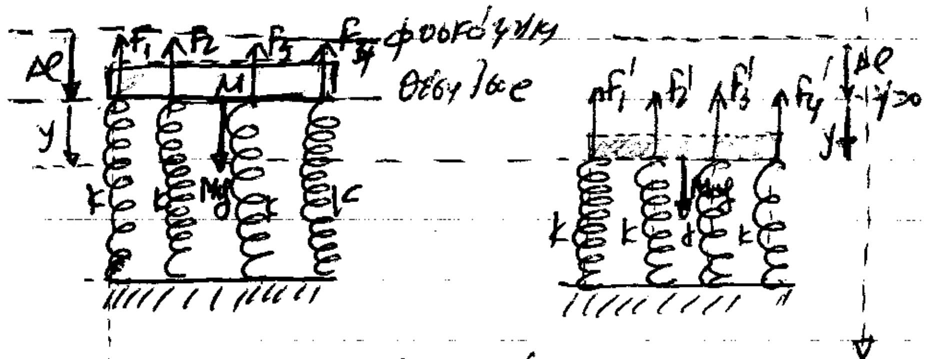
$v_{max} = \omega A \Rightarrow v_{max} = 10 \cdot 0,25 \Rightarrow v_{max} = 2,5 m/s$
$v_{max} = \frac{F_0'}{0,2} \Rightarrow F_0' = 0,2 v_{max} \Rightarrow F_0' = 0,2 \cdot 2,5 \Rightarrow F_0' = 0,5N$

Άρα $v = v_{max} \sigma\upsilon\nu(10t) \Rightarrow v = 2,5 \sigma\upsilon\nu(10t)$ (SI)
$y = A \eta\mu(10t) \Rightarrow y = 0,5 \eta\mu(10t)$ (SI)
$F = F_0' \sigma\upsilon\nu(10t) \Rightarrow F = 0,5 \sigma\upsilon\nu(10t)$ (SI)

δ.1) $F = 0,5 \sigma\upsilon\nu(10t)$ (SI)

δ.2) $y = 0,25 \eta\mu(10t)$ (SI)

3.19



μηχανικό ανάλογο

Α)
Για τη θέση Ισορροπίας γράφουμε

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Mg = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$\Rightarrow Mg = 4K\Delta\ell \quad (1)$

Για μια τυχαία θετική θέση έχουμε $\Sigma \vec{F}_y = M\vec{g} + \vec{F_1'} + \vec{F_2'} + \vec{F_3'} + \vec{F_4'} \Rightarrow \Sigma F_y = Mg - 4K(\Delta\ell + y) \xrightarrow{(1)} \Sigma F_y = -4K \cdot y$

άρα α.α.τ με $D = 4K \Rightarrow \boxed{D = 4000\pi^2 \, N/m}$

Β) Ο χρόνος πτώσης στις διαδοχικές λακκούβες είναι $t = \frac{\ell}{\upsilon} \Rightarrow t = \frac{2{,}5m}{14{,}4 \, km/h} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{2{,}5m}{14{,}4 \frac{1000m}{3600s}} \Rightarrow t = \frac{2{,}5m}{4m/s} \Rightarrow t = 0{,}625\,s \Rightarrow$ "περίοδος διεγέρτη"

$T_\delta = 0{,}625\,s$

Η συχνότητα ταλάντωσης του αυτοκινήτου είναι προφανώς η συχνότητα του διεγέρτη $f = \frac{1}{T_\delta} = \frac{1}{0{,}625} Hz \Rightarrow \boxed{f = 1{,}6Hz}$

Γ) Η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του αυτοκινήτου είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{D/M} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4000\pi^2}{1000}} \Rightarrow f_0 = 1Hz$. Για να έχουμε συντονισμό πρέπει $T_\delta = T_0 \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{f_0} \Rightarrow T_\delta = 1s$

άρα $t = \frac{\ell}{\upsilon_0} = T_0 \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{\ell}{T_0} \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{2{,}5m}{1s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 2{,}5 m/s}$

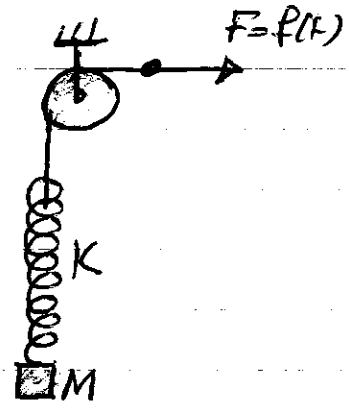
Δ) $F = 6{,}28 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow F = 6{,}28 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{T_0} t) \Rightarrow F = 6{,}28 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu(2\pi t)$ SI

$F = -F_{\alpha\pi} \Rightarrow F = -(-0{,}1\upsilon) \Rightarrow F = 0{,}1\upsilon \Rightarrow 6{,}28 \cdot 10^{-2} \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = 0{,}1\upsilon$

$\Rightarrow \upsilon = 0{,}628 \, \sigma\upsilon\nu(2\pi t)$

$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow 0{,}628 = 2\pi A \Rightarrow \boxed{A = 0{,}1m}$

3.20



$M=1kg$, $K=225\,N/m$

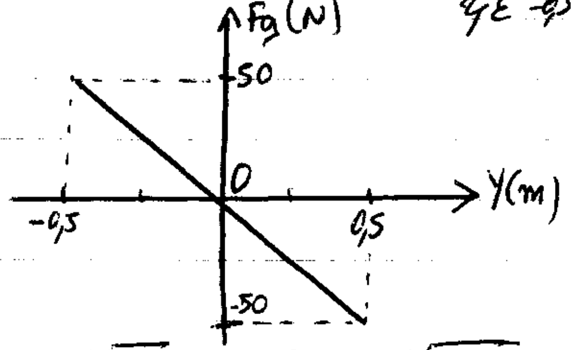
$b=2\,kg\,s^{-1}$, $A=0{,}5\,m$

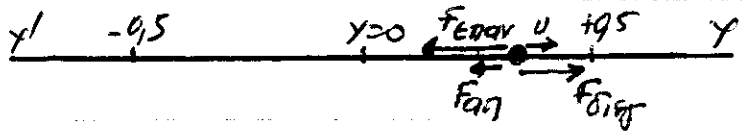
$F=F_0\eta\mu(10t)$ (SI)

A) $\vec{F}_{o\lambda}=M\vec{a} \Rightarrow F_{o\lambda}=M(-\omega^2 y)$

$\Rightarrow F_{o\lambda}=-1kg(10\,rad/s)^2 y \Rightarrow \boxed{F_{o\lambda}=-100y\ (SI)}$

$\gamma\iota\alpha\ -0{,}5\le y\le +0{,}5\ (m)$





B.1) $\upsilon=+10\sqrt{A^2-y^2} \Rightarrow \upsilon=+10\sqrt{0{,}5^2-0{,}3^2}$

$\Rightarrow \upsilon=+4\,m/s$, $F_{\alpha\pi}=-b\upsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{\alpha\pi}=-2\cdot 4 \Rightarrow \boxed{F_{\alpha\pi}=-8N}$

B.2) Στη θέση $\cancel{x}=+0{,}3$

$F_{o\lambda}=-100y=-100(+0{,}3) \Rightarrow F_{o\lambda}=-30N$

$F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}=-Dy=-Ky=-225(+0{,}3) \Rightarrow F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}=-67{,}5N$

$F_{\alpha\pi}=-8N$

$\vec{F}_{o\lambda}=\vec{F}_{\varepsilon\pi\alpha\nu}+\vec{F}_{\alpha\pi o\sigma}+\vec{F}_{\delta\iota\varepsilon\gamma} \Rightarrow$ $-30=-67{,}5-8+F_{\delta\iota\varepsilon\gamma} \Rightarrow \boxed{F_{\delta\iota\varepsilon\gamma}=45{,}5N}$

Γ) Προσοχή!!

$P_{\pi\rho o\sigma}=\frac{dE_{\pi\rho o\sigma}}{dt}=\frac{dW_{F\delta\iota\varepsilon\gamma}}{dt}=\underbrace{F_{\delta\iota\varepsilon\gamma}\cdot\upsilon}_{\text{αλγεβρικά}}=45{,}5\cdot 4 \Rightarrow \boxed{P_{\pi\rho o\sigma}=+182\,J/s}$ ή $P_{\pi\rho o\sigma}=182W$

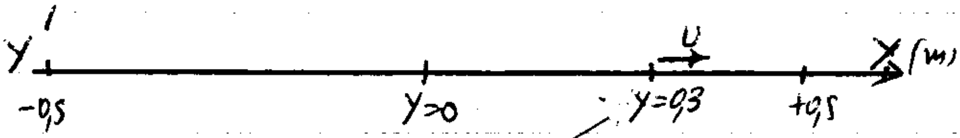
$P_{\alpha\pi o\beta}=\frac{dE_{\alpha\pi o\beta}}{dt}=\frac{dW_{\alpha\pi}}{dt}=\frac{F_{\alpha\pi}\cdot dy}{dt}=\underbrace{F_{\alpha\pi}\cdot\upsilon}_{\text{αλγεβρικά}} \Rightarrow P_{\alpha\pi o\beta}=(-8)(+4) \Rightarrow \boxed{P_{\alpha\pi o\beta}=-32\,J/s}$

Στη θέση αυτή οι ρυθμοί μεταβολής κινητικής και δυναμικής ενέργειας (ταλάντωσης) είναι:

$\frac{dK}{dt}=(\frac{1}{2}M\upsilon^2)'=M\upsilon\frac{d\upsilon}{dt}=Ma\upsilon=\Sigma F_y\upsilon=F_{o\lambda}\cdot\upsilon=-30\cdot 4 \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt}=-120\,J/s}$

$\frac{dU}{dt}=(\frac{1}{2}Dy^2)'=(\frac{1}{2}Ky^2)'=\frac{1}{2}K2y\frac{dy}{dt}=Ky\cdot\upsilon=-F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}\upsilon=-(-67{,}5)\cdot 4$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dU}{dt}=+270\,J/s}$



Από τη διέγερση προσφέρεται $P_{προσ}=182W$

182W

ταλαντωτής

32W

Από τις αποσβέσεις αφαιρούνται $P_{αποσ}=32W$

Άρα η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή αυξάνεται με ρυθμό $P_{μηχ}=150W$

$\frac{dK}{dt}=-120W$

$\frac{dU}{dt}=+270W$

$$\frac{dK}{dt}+\frac{dU}{dt}=P_{μηχ}=\ldots=150W$$

Δ.1) Στη θέση $y=0$

$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\omega A)^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(10\cdot 0{,}5)^2=12{,}5J \Rightarrow \boxed{K=12{,}5J}$

$U=0$

Στη θέση $y=+0{,}5m$

$K=0$

$U=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}225\cdot 0{,}5^2 \Rightarrow \boxed{U=28{,}125J}$

... $y=0 \longrightarrow y=+0{,}5m$

Η δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται μέσω του έργου της δύναμης επαναφοράς, άρα $W_{επ}=-\Delta U=-[U_{τελ}-U_{αρχ}]$

$\Rightarrow W_{επ}=-U_{τελ} \Rightarrow W_{επ}=-28{,}125J$

$\Delta K=W_{ολ}\Rightarrow K_{τελ}-K_{αρχ}=W_{επαν}+W_{αποσ}+W_{διεγ}\Rightarrow$

$\Rightarrow 0-12{,}5=-28{,}125-3{,}925J+W_{διεγ}\Rightarrow \boxed{W_{διεγ}=19{,}55J}$

Δ.2) $y=+0{,}5m \longrightarrow y=0$

$W_{F\Pi} = -\Delta U = +28{,}125 J$

$\Delta K = W_{F\Pi} + W_{B\alpha\Pi} + W_{\Sigma\Pi F\Gamma} \Rightarrow +12{,}5 = +28{,}125 - 3{,}925 + W_{\Sigma\Pi F\Gamma}$

$\Rightarrow \boxed{W_{\Sigma\Pi F\Gamma} = -11{,}7 J}$

E) $\left.\begin{array}{l} \omega_1 = 10\ rad/s,\ A_1 = 0{,}5m,\ v_{1,max} = \omega_1 A_1 \\ \omega_2 = 22{,}5\ rad/s,\ A_2 = ;,\ v_{2,max} = \omega_2 A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_1 A_1 = \omega_2 A_2 \Rightarrow$

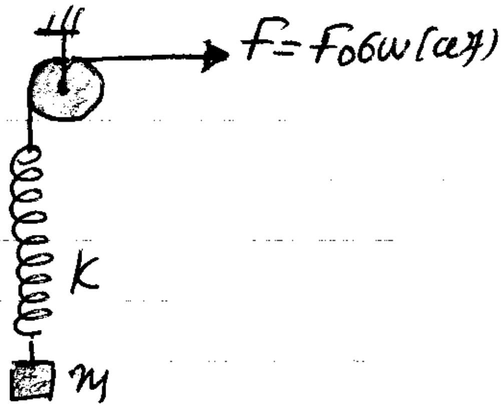
$\Rightarrow A_2 = \dfrac{\omega_1 A_1}{\omega_2} = \dfrac{10\ rad/s \cdot 0{,}5m}{22{,}5\ rad/s} \Rightarrow \boxed{A_2 = 0{,}22m} \neq A_1.$

••• $K = m\omega_0^2 \Rightarrow 225 = 1\,\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = 15\ rad/s$

$\sqrt{\omega_1\omega_2} = \sqrt{10 \cdot 22{,}5} = \sqrt{225} = 15 = \omega_0 \Rightarrow \sqrt{\omega_1\omega_2} = \omega_0$ ά

$\boxed{\omega_1\omega_2 = \omega_0^2}$

3.21



$m = 0,8\,kgr$

$\Delta t = 0,1\pi \Rightarrow \frac{T}{2} = 0,1\pi \Rightarrow T = 0,2\pi\,s$

A.1) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2\pi} \Rightarrow \omega = 10\,rad/s$

και επειδή είναι σε ,
κατάσταση συντονισμού $\omega_0 = 10\,rad/s$,

$D = K = m\omega_0^2 \Rightarrow K = 0,8 \cdot 10^2 \Rightarrow \boxed{K = 80\,N/m}$

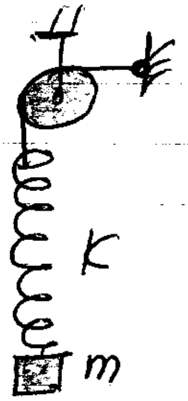
$U_{max} = \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow 1,6 = \frac{1}{2} 80 A_0^2 \Rightarrow \boxed{A_0 = 0,2\,m}$

A.2)... $F_{\delta,\varepsilon\xi} = -F_{\alpha\nu} \Rightarrow F_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t) = bv \Rightarrow v = \frac{F_0}{b} \sigma\upsilon\nu(\omega t)$

$\Rightarrow v = v_{max} \sigma\upsilon\nu(\omega t)$
$v_{max} = \omega A = \omega_0 A = 10 \cdot 0,2 = 2\,m/s$ $\Big\}\ \boxed{v = 2\sigma\upsilon\nu(10t)\ \ SI}$

$y = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu(10t)$ (SI)

B) $A = A_0 e^{-\Lambda t}$, $\Lambda = \frac{\ell n 2}{2\pi} s^{-1}$



$A_0 = 0,2\,m$

$t_0 = 0$

$E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2 = \frac{1}{2} K A_0^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot 0,2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow E_0 = 1,60\,J$

$t = t_1$: $E_1 = E_0 - |W_{\varepsilon\nu}| \Rightarrow E_1 = 1,60\,J - 1,5\,J \Rightarrow E_1 = 0,1\,J$

$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} K A_1^2 \Rightarrow 0,1 = \frac{1}{2} 80 A_1^2 \Rightarrow A_1 = 0,05\,m$

$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow 0,05 = 0,20\, e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\Lambda t_1}$

$\Rightarrow -2\ell n 2 = -\Lambda t_1 \Rightarrow 2\ell n 2 = \frac{\ell n 2}{2\pi} t_1 \Rightarrow t_1 = 4\pi\,s$

άρα $N = \frac{t_1}{T} \Rightarrow N = \frac{t_1}{0,2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{4\pi}{0,2\pi} \Rightarrow \boxed{N = 20 \text{ ταλαντώσεις}}$

Γ.1) $\lambda = \frac{b}{2m} \Rightarrow b = 2m\lambda \Rightarrow b = 2 \cdot 0{,}8 \frac{\ell n 2}{2\pi} \Rightarrow b = \frac{0{,}8 \ell n 2}{\pi}\ kg\, s^{-1}$

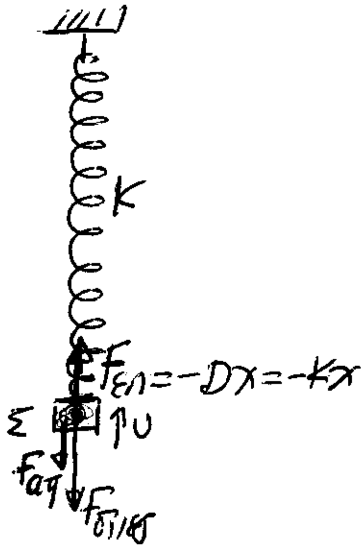
$F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = -F_{\alpha\nu} = -(-b\upsilon) = b\upsilon \Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = \frac{0{,}8 \ell n 2}{\pi} \cdot 2\sigma\upsilon\nu(10t)$

$\Rightarrow \boxed{F_{\delta\iota\epsilon\gamma} = 0{,}35 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)}$ SI $\Rightarrow F_{\delta\iota\epsilon\gamma,\max} = 0{,}35 N$

Γ.2) $\frac{dE}{dt} = \ldots = -b\upsilon^2 = -\frac{0{,}8 \ell n 2}{\pi} \cdot 0{,}25 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -0{,}044 J/s}$

3.22

Εξαναγκασμένη ταλάντωση



Α. α) $F_{διεγ} = F_0 ημ(ωt+φ_0) \Rightarrow F_{διεγ} = 8\sqrt{3}\, ημ(10t+φ_0)$

$\xrightarrow[F_{διεγ}=8\sqrt{3}]{t_0=0}$ $8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\, ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = 1 \Rightarrow φ_0 = \frac{π}{2}$ rad

$F_{διεγ} = 8\sqrt{3}\, ημ(10t+\frac{π}{2}) \Rightarrow \boxed{F_{διεγ} = 8\sqrt{3}\, συν(10t)\ (SI)}$

β) $υ_{max} = ωA \Rightarrow 4 = 10 \cdot A \Rightarrow A = 0{,}4\,m$

$x = A\,ημ(ωt+φ_0') \Rightarrow x = 0{,}4\,ημ(10t+φ_0')$

Για $t = \frac{π}{30}s$, $x=0$ κι $υ>0$, $0 = 0{,}4\,ημ(10\frac{π}{30}+φ_0')$

$\Rightarrow ημ(\frac{π}{3}+φ_0') = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{π}{3}+φ_0' = 0 \text{ ή } \frac{π}{3}+φ_0' = 2π \\ \frac{π}{3}+φ_0' = π \end{cases}$ και επειδή $υ>0$

δεκτή η $\frac{π}{3}+φ_0' = 0 \Rightarrow φ_0' = -\frac{π}{3}$ (ή $φ_0' = 2π - \frac{π}{3} = \frac{5π}{3}$)

άρα $x = 0{,}4\,ημ(10t-\frac{π}{3})$ (SI)

$υ = 4\,συν(10t-\frac{π}{3})$ (SI)

γ) $α = -ω^2 A\,ημ(ωt+φ_0') \Rightarrow α = -40\,ημ(10t-\frac{π}{3})$ (SI)

$ΣF_{ολ} = mα \Rightarrow ΣF_{ολ} = \frac{5}{6} \cdot (-40\,ημ(10t-\frac{π}{3})) \Rightarrow$

$\Rightarrow ΣF_{ολ} = -\frac{100}{3}ημ(10t-\frac{π}{3})$ (SI)

Β. $ΣF_{ολ} = mα = m(-ω^2x) = -mω^2x \Rightarrow F_{επαναφοράς} + F_{διεγ} + F_{αποσ} = -mω^2x$

$\Rightarrow -Kx + F_{διεγ} + F_{απ} = -mω^2x \xrightarrow{x=0} F_{διεγ} + F_{απ} = 0$

$\Rightarrow F_{απ} = -F_{διεγ} \Rightarrow F_{απ} = -8\sqrt{3}\, συν(10\frac{π}{30}) \Rightarrow \boxed{F_{απ} = -4\sqrt{3}\,N}$

(ο ταλαντωτής διέρχεται από την θέση $x>0$ την $t=\frac{\pi}{30}s$)

Γ. $F_{απ}=-bv \xrightarrow[v=4m/s]{x>0,\ v>0} -4\sqrt{3}=-b\cdot 4 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{3}\,kg\,s^{-1}}$

Δ. $x=0,4\,ημ(10t-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \frac{0,4\sqrt{3}}{2}=0,4\,ημ(10t-\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow ημ(10t-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 10t-\pi/3=2κ\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $10t-\pi/3=2κ\pi+\frac{2\pi}{3}$

και επειδή $v>0$ δεκτή η $\boxed{10t-\pi/3=2κ\pi+\pi/3}$

$\Rightarrow \boxed{10t=2κ\pi+2\pi/3}$

Η ταχύτητα στη θέση αυτή $x=0,4\frac{\sqrt{3}}{2}$ m είναι

$v=4συν(10t-\pi/3)=4συν(2κ\pi+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \boxed{v=+2m/s}$

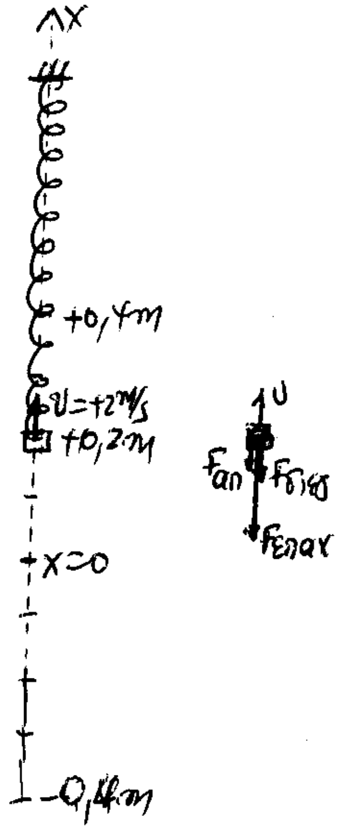
Στην ανωτέρω θέση έχουμε

- $F_{διεγ}=8\sqrt{3}\,συν(10t)=8\sqrt{3}\cdot συν(2κ\pi+\frac{2\pi}{3})=-4\sqrt{3}N$ $\Rightarrow F_{διεγ}=-4\sqrt{3}N$
- $F_{απ}=-bv=-\sqrt{3}\cdot 2=-2\sqrt{3}N \Rightarrow F_{απ}=-2\sqrt{3}N$
- $F_{επαν}=-kx=-\frac{320}{6}\cdot 0,4\sqrt{3}/2=-\frac{64\sqrt{3}}{6}N \Rightarrow F_{επαν}=-\frac{64\sqrt{3}}{6}N$
- $\Sigma F_{ολ}=-m\omega^2 x=-\frac{5}{6}\cdot 100\cdot 0,4\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Sigma F_{ολ}=-\frac{50\sqrt{3}}{3}N$

1) Ρυθμός προσφοράς ή αφαίρεσης ενέργειας μέσω του έργου του διεγέρτη (ισχύς διεγέρτη)

$$\frac{dE_{διεγ}}{dt}=\frac{dW_{διεγ}}{dt}=\frac{F_{διεγ}\cdot dx}{dt}=F_{διεγ}\cdot v=(-4\sqrt{3}N)\cdot(+2m/s)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{διεγ}}{dt}=-8\sqrt{3}\,J/s$$



2) Ρυθμός αφαίρεσης ενέργειας μέσω του έργου των αποσβέσεων (λόγω αποσβέσεων)

$$\frac{dE_{αποσ}}{dt} = \frac{dW_{απ}}{dt} = \frac{F_{απ} \cdot dx}{dt} = F_{απ} \cdot v$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{αποσ}}{dt} = (-2\sqrt{3}\,N)(+2\,m/s)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{αποσ}}{dt} = -4\sqrt{3}\,J/s$$

3) Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ολ}}{dt} = \frac{\Sigma F_{ολ} \cdot dx}{dt} = \Sigma F_{ολ}\, v$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{50\sqrt{3}}{3} N \cdot (+2\,m/s) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{100\sqrt{3}}{3} J/s$$

Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας (που οφείλεται στη αλληλεπίδραση $F_{ελατ} = -kx$)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{-dW_{ελατ}}{dt} = \frac{-F_{ελατ} \cdot dx}{dt} = -F_{ελατ} \cdot v = -\left(-\frac{64\sqrt{3}}{6} N\right) \cdot (+2\,m/s)$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = +\frac{64\sqrt{3}}{3} J/s$$

Σχόλια * Ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας

$$\frac{dE_{μηχ}}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = -\frac{100\sqrt{3}}{3} J/s + \frac{64\sqrt{3}}{3} J/s = -\frac{36\sqrt{3}}{3} J/s = -12\sqrt{3}\,J/s$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE_{μηχ}}{dt} = -12\sqrt{3}\,J/s}$$

* $$\frac{dE_{διεγ}}{dt} + \frac{dE_{αποσ}}{dt} = -12\sqrt{3}\,J/s$$

άρα $$\frac{dE_{μηχ}}{dt} = \frac{dE_{διεγ}}{dt} + \frac{dE_{αποσ}}{dt}$$

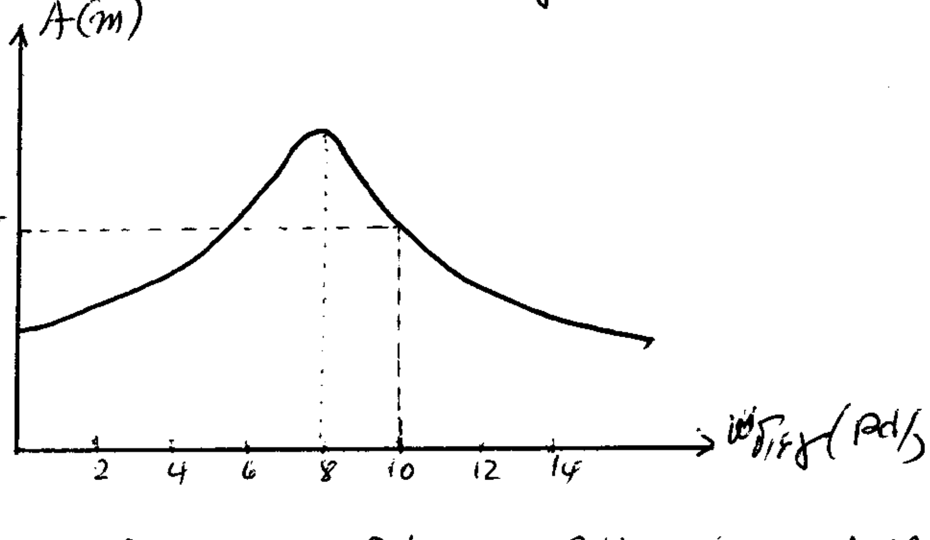
Δηλαδή η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται μέσω των έργων των μη συντηρητικών δυνάμεων $F_{διεγ}$ και $F_{αντ}$.

2) Η μηχανική ενέργεια αυξομειώνεται, αλλά ανά περίοδο παραμένει σταθερή.

3) Το έργο των αποσβέσεων είναι πάντοτε αρνητικό για κάθε περιοχή, ενώ το έργο της δύναμης του διεγέρτη μπορεί να είναι τόσο θετικό, όσο και αρνητικό.

Δ) Αν αυξήσουμε την περίοδο του διεγέρτη ή ισοδύναμα μειώσουμε την κυκλική συχνότητα του διεγέρτη για να δούμε τι θα συμβεί στο πλάτος πρέπει να κάνουμε την καμπύλη συντονισμού.

$$D = K = m\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{K/m} = \sqrt{\frac{320/6\ N/m}{5/6\ kg}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 8\ rad/s}$$



Όταν η $\omega_{διεγ}$ μειώνεται από $\omega = 10\ rad/s$ μέχρι $\omega = \omega_0 = 8\ rad/s$ (Η περίοδος αυξάνεται από $\frac{2\pi}{10} s$ μέχρι $\frac{2\pi}{8} s$) το πλάτος ταλάντωσης αυξάνεται και μεγιστοποιείται όταν $\omega = \omega_0 = 8\ rad/s$ ($T = \frac{2\pi}{8} s$)

(Για να είμαστε ακριβείς όταν το ω είναι λίγο μικρότερο από ω_0)

$$\longrightarrow \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} \simeq 7,86\ rad/s$$

όταν ω αρχίζει να γίνεται μικρότερο από $\omega_0 = 8\frac{rad}{s}$ το πλάτος A συνεχώς μειώνεται

Σχόλιο: $\Sigma F_{ολ} = m\alpha = m(-\omega^2 x) = -m\omega^2 x = -\frac{5}{6}\cdot 100 \cdot x = -\frac{500}{6}x$
$\Rightarrow \Sigma F_{ολ} = -\frac{500}{6}x$

Παρατηρούμε ότι η συνολική δύναμη $\vec{\Sigma F_{ολ}}$ (είναι της μορφής $\Sigma F_{ολ} = -D'x$) έχει συντηρητική συμπεριφορά. Στη συνολική αυτή αλληλεπίδραση ας αντιστοιχήσουμε μια δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης U' που προφανώς θα δίνεται από τη σχέση $U' = \frac{1}{2}D'x^2$ / $D' = m\omega^2 = \frac{500}{6}\frac{N}{m}$

- Για $x = 0$ ‖ $K = K_{max} = \frac{1}{2}mU_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{5}{6}\cdot 4^2 \Rightarrow K = \frac{40}{6}J$
  $U' = 0$
  $E_{μηχ} = K + U' \Rightarrow E_{μηχ} = \frac{40}{6}J$

- Για $x = \pm A$, $x = \pm 0{,}4m$ ‖ $K = 0$
  $U' = U'_{max} = \frac{1}{2}\frac{500}{6}(0{,}4)^2 \Rightarrow U' = \frac{40}{6}J$
  $E_{μηχ} = K + U' \Rightarrow E_{μηχ}\ \frac{40}{6}J$

- Για $x = \pm A\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow x = 0{,}2\sqrt{3}\,m$ ‖ $K = \frac{1}{2}mU^2 = \frac{1}{2}\frac{5}{6}\cdot 2^2 \Rightarrow K = \frac{10}{6}J$
  $U' = \frac{1}{2}\frac{500}{6}\cdot(0{,}2\sqrt{3})^2 \Rightarrow U' = \frac{30}{6}J$
  $E_{μηχ} = K + U' \Rightarrow E_{μηχ} = \frac{40}{6}J$

Με τη λογική αυτή παρατηρούμε ότι $E_{μηχ}$ = σταθερή

Σχόλιο:

Από τη στιγμή που είναι γνωστή η δύναμη που διεγείρει (ή εκφράζεται η εξίσωσή της) $F_{διεγ} = 8\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu(10t)$, δεν απαιτούνται στοιχεία για την αρχική φάση φ_0' της $x = 0{,}4\eta\mu(10t + \varphi_0')$, αλλά έχει για μαθηματική επεξεργασία μάλλον δύσκολη.

→

Γνωστά $F_{διεγ} = 8\sqrt{3}\,συν(10t)$, $x = 0{,}4\,συν(10t + φ_0')$, $K = \frac{320}{6}\,N/m$
$m = \frac{5}{6}\,kg \ldots$, $b = \sqrt{3}\,kg\,s^{-1}$

$$\Sigma \vec{F}_{ολ} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{διεγ} + \vec{F}_{επαναφ} + \vec{F}_{αποσ} = m(-ω^2 x)$$

$$F_{διεγ} + F_{επαναφ} + F_{αποσ} = -mω^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}\,συν(10t) - Kx - bυ = -mω^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}\,συν(10t) - \frac{320}{6}\cdot 0{,}4\,ημ(10t + φ_0') - \sqrt{3}\cdot 4\,συν(10t + φ_0') = -\frac{5}{6}\cdot 100\cdot 0{,}4\,ημ(10t + φ_0')$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}\,συν(10t) = \frac{64}{3}ημ(10t + φ_0') + 4\sqrt{3}\,συν(10t + φ_0') - \frac{100}{3}ημ(10t + φ_0')$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}\,συν(10t) = 4\sqrt{3}\,συν(10t + φ_0') - \frac{36}{3}ημ(10t + φ_0') \quad (1)$$

Αυτή ισχύει για κάθε χρονική στιγμή άρα και για $t = KT + \frac{T}{4}$, οπότε $10t = ωt = \frac{2π}{T}(KT + T/4) = 2Kπ + \frac{π}{2}$

$$(1) \Rightarrow 8\sqrt{3}\,συν(2Kπ + \tfrac{π}{2}) = 4\sqrt{3}\,συν(2Kπ + \tfrac{π}{2} + φ_0') - \frac{36}{3}ημ(2Kπ + \tfrac{π}{2} + φ_0')$$

$$\Rightarrow 0 = 4\sqrt{3}\,συν(\tfrac{π}{2} + φ_0') - 12\,ημ(\tfrac{π}{2} + φ_0') \Rightarrow 0 = 4\sqrt{3}\,ημ(π + φ_0') - 12\,συνφ_0'$$

$$\Rightarrow 0 = -4\sqrt{3}\,ημφ_0' - 12\,συνφ_0' \Rightarrow 4\sqrt{3}\,ημφ_0' = -12\,συνφ_0' \Rightarrow \frac{ημφ_0'}{συνφ_0'} = -\frac{12}{4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow εφφ_0' = -\sqrt{3} \Rightarrow φ_0' = 2Kπ - π/3 \;\wedge\; φ_0' = 2Kπ + π - \frac{π}{3}$$

$$\Rightarrow φ_0' = -π/3 \;\text{ ή }\; φ_0' = 5π/3$$

Εδώ χρειάζονται στοιχεία μόνο για την επιλογή του $φ_0' = -π/3$

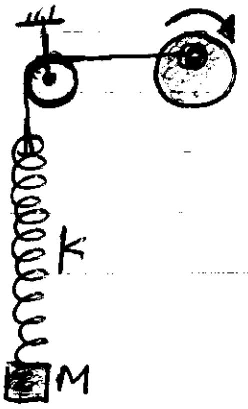
Σχόλιο:

Γενικά, αν σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση η δύναμη του διεγέρτη είναι $F = F_0\,\text{συν}(\omega t)$ και ω_0 η κυκλική ιδιοσυχνότητα, αποδεικνύεται ότι το πλάτος A και η αρχική φάση φ_0 της εξίσωσης απομάκρυνσης $x = A\eta\mu(\omega t - \varphi_0)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{m(\omega^2-\omega_0^2)}{b\omega} \quad \text{ή}$$

$$\text{συν}\varphi_0 = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega^2-\omega_0^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

3.23



α) $f_{διεγέρτη} = f = \frac{N}{t} = \frac{40}{10\pi} \Rightarrow f = \frac{4}{\pi}\, Hz$

$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{4}{\pi}\, rad/s \Rightarrow \omega = 8 \frac{rad}{s}$

β) $y = A\,ημ(\omega t) \Rightarrow y = 9{,}8\cdot 10^{-2}\, ημ(8t)$ (SI)

$\upsilon = \omega A\, συν(\omega t) \Rightarrow \upsilon = 0{,}784\, συν(8t)$ (SI)

γ) $ΣF = Mα = M(-\omega^2 y) \Rightarrow$

$ΣF = -M\omega^2 y \Rightarrow \boxed{ΣF = -D' y}$

με $D' = M\omega^2 \neq M\omega_0^2 = K$

$D' = 1\cdot 8^2 = 64\, N/m$

$D = K = 100\, N/m$ (!!) } άρα <u>σωστή η πρόταση Γ.3</u>

$F_{ολ} = -64y$ (SI)

$F_{επαν} = -100y$ (SI)

δ.1) $P_{απώλειας\ ενέργειας} = \frac{dE_{απωλ}}{dt} = \frac{dW_{απωλ}}{dt} \Rightarrow \frac{dE_{απωλ}}{dt} = \frac{F_{απ}\cdot dx}{dt} \Rightarrow \frac{dE_{απωλ}}{dt} = -b\upsilon^2$

$\Rightarrow \dots \frac{dE_{απωλ}}{dt} = -0{,}9\cdot[0{,}784\cdot συν(8t)]^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dE_{απωλ}}{dt} = -0{,}553\, συν^2(8t)}$

δ.2) $\vec{F}_{ολ} = M\vec{α} \Rightarrow \vec{F}_{επαναφοράς} + \vec{F}_{απόσβεσης} + \vec{F}_{διεγέρτη} = M\vec{α} \Rightarrow$

$\Rightarrow -Dy - b\upsilon + F_{διεγ} = M(-\omega^2 y) \Rightarrow -100y - 0{,}9\cdot 0{,}784\, συν(8t) + F_{διεγ} = -64y$

$\Rightarrow F_{διεγ} = 36y + 0{,}7056\, συν(8t) \Rightarrow F_{διεγ} = 36\cdot 9{,}8\cdot 10^{-2}\, ημ(8t) + 0{,}7056\cdot συν(8t)$

$\Rightarrow F_{διεγ} = 3{,}528\, ημ(8t) + 0{,}7056\, συν(8t) \Rightarrow F_{διεγ} = 3{,}528\,[ημ(8t) + 0{,}2\, συν(8t)]$

θέτουμε $0{,}2 = εφφ$, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$F_{διεγ} = 3{,}528\,[ημ(8t) + εφφ\cdot συν(8t)] \Rightarrow F_{διεγ} = 3{,}528\left[ημ(8t) + \frac{ημφ}{συνφ}\, συν(8t)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow F_{διεγ} = \frac{3{,}528}{συνφ}\,[ημ(8t)\, συνφ + ημφ\, συν(8t)] \Rightarrow F_{διεγ} = \frac{3{,}528}{συνφ}\, ημ(8t+φ)$ (1)

$εφφ = 0{,}2 \Rightarrow συνφ = \frac{1}{\sqrt{1+εφ^2φ}} \simeq 0{,}98$

(1) $\Rightarrow F_{διεγ} = \frac{3{,}528}{0{,}98}\, ημ(8t+φ) \Rightarrow \boxed{F_{διεγ} = 3{,}6\, ημ(8t+φ)}$ (SI)

3.25

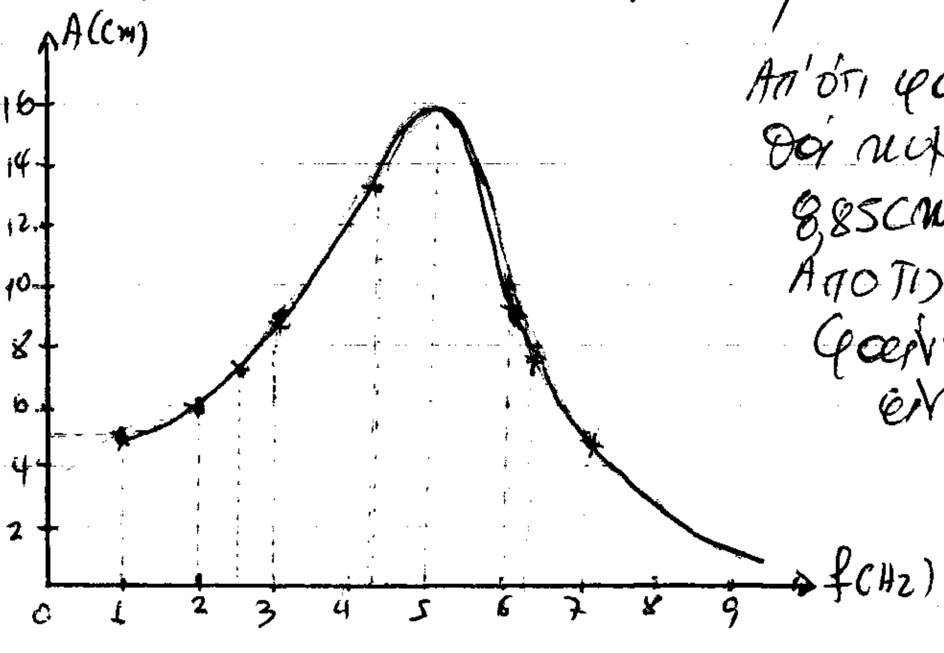
$M=0{,}4\,kg$, ... $Mg=k\Delta l \Rightarrow k=\frac{Mg}{\Delta l}=\frac{0{,}4\cdot 10}{10^{-2}} \Rightarrow k=400\,N/m$

$f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{k/M}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{40\pi^2}{0{,}4}}=\frac{1}{2\pi}10\pi=5Hz \Rightarrow f_0=5Hz$

α/α	10 T(s)	T(s)	f(Hz)	A(cm)
1	1,25	0,125	8,00	3,10
2	1,43	0,143	6,99	4,85
3	1,60	0,160	6,25	—
4	1,67	0,167	5,99	8,85
5	2,00	0,200	5,00	16,00
6	2,30	0,230	4,35	13,20
7	2,50	0,250	4,00	—
8	3,33	0,333	3,00	7,45
9	4,00	0,400	2,50	6,50
10	5,00	0,500	2,00	5,90
11	10,00	1,00	1,00	5,20

A) Παρατηρούμε ότι $A_{max}=16{,}00cm$ όταν $f_{διεγ}=5{,}00Hz$
Και άλλα και $f_0=5Hz$ (ιδιοσυχνότητα)
Άρα το σύστημα για $f=5Hz$ είναι συντονισμένο και το πλάτος $A=16{,}00cm$ είναι το μέγιστο

B) Αυτό μπορεί να ελεγχθεί μόνο με την καμπύλη συντονισμού.



Απ' ότι φαίνεται το πλάτος θα κυμαίνεται μεταξύ 8,85cm και 4,85cm. Αποτυπώνοντας τα σημεία, φαίνεται ότι σωστή είναι η $\boxed{A=7{,}45cm}$

Γ) Για $f_1 = 4Hz \Rightarrow A_1 = ;$ (7η σειρά)
Για $f_2 = 6{,}25\,Hz \Rightarrow A_2 = 7{,}45\,cm$ (3η σειρά)

Προσέχουμε ότι $f_1 f_2 = 4Hz \cdot 6{,}25Hz = 25Hz^2 = f_0^2$ // $f_0 = 5Hz$

Άρα για τις συχνότητες $f_1 = 4Hz$ και $f_2 = 6{,}25Hz$ έχουμε το ίδιο πλάτος ταχύτητας

Για $f_1 = 4Hz \Rightarrow v_{01} = \omega_1 A_1 = 2\pi f_1 A_1$
Για $f_2 = 6{,}25Hz \Rightarrow v_{02} = \omega_2 A_2 = 2\pi f_2 A_2$
$\Rightarrow v_{01} = v_{02} \Rightarrow 2\pi f_1 A_1 = 2\pi f_2 A_2$

$$\Rightarrow f_1 A_1 = f_2 A_2 \Rightarrow A_1 = \frac{f_2 \cdot A_2}{f_1} \Rightarrow A_1 = \frac{6{,}25Hz \cdot 7{,}45\,cm}{4Hz} \Rightarrow \boxed{A_1 = 11{,}64\,cm}$$

στην κατάσταση συντονισμού (*)

Δ) $F_{διεγ} = -F_{αποσ} \Rightarrow F_{διεγ} = -(-bv) \Rightarrow F_{διεγ} = bv$

$$\Rightarrow F_{διεγ,max} = b\,v_{max} \Rightarrow b = \frac{F_{διεγ,max}}{v_{max}} \quad (1)$$

Στο συντονισμό $v_{max} = \omega_0 A = 2\pi f_0 A = 2\pi \cdot 5Hz \cdot 0{,}16\,m = 1{,}6\pi\,m/s$

$$(1) \Rightarrow b = \frac{20\,N}{1{,}6\pi\,m/s} \Rightarrow \boxed{b \simeq 4\,kg \cdot s^{-1}}$$

Ε) $\vec{F_{ολ}} = m\vec{a} \Rightarrow F_{ολ} = m(-\omega^2 y) \Rightarrow F_{ολ} = -m\omega^2 y$

$$\Rightarrow F_{ολ} = -0{,}4(2\pi \cdot 2{,}5)^2 \cdot y \Rightarrow F_{ολ} = -0{,}4 \cdot 4\pi^2 \cdot 6{,}25 \cdot y \Rightarrow F_{ολ} = -100y$$

και $F_{ολ,max} = -100 \cdot y_{max} = 100 \cdot 6{,}5 \cdot 10^{-2}\,N \Rightarrow \boxed{F_{ολ,max} = 6{,}5N}$