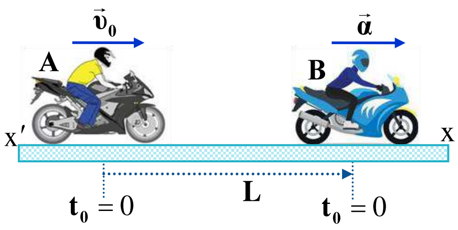
… Η δυνατότητα συνάντησης δύο κινητών.…

Ένας μοτοσικλετιστής Α κινείται σε άξονα $x'x$ με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0 = 18\,\mathrm{m/s}$ και την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ απέχει απόσταση L=100m από έναν άλλον μοτοσικλετιστή Β που είναι στον ίδιο άξονα και μπροστά από τον Α. Εκείνη την στιγμή ξεκινάει ο Β με επιτάχυνση την οποία δεχόμαστε σταθερή και ίση με $\alpha = 2\,\mathrm{m/s^2}$ μέχρι την απόκτηση της μέγιστης δυνατής ταχύτητάς του που είναι $\upsilon_{B,max} = 22\,\mathrm{m/s}$.



α. Εξηγείστε ότι ο Α δεν θα φθάσει τον Β.

β. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που ο Α θα πλησιάζει τον Β.

γ. Υπολογίστε ποια ελάχιστη σταθερή ταχύτητα $\upsilon'_{0,\,min}$ έπρεπε να έχει ο Α ώστε να συναντηθεί με τον Β.

Αν ο Α είχε την ταχύτητα $\upsilon'_{0,\,min}$ να βρείτε:

δ. τη στιγμή της συνάντησης,

ε. τη απόσταση των κινητών Δt=2s μετά την στιγμή της συνάντησης.

Θεωρείστε τα κινητά ως υλικά σημεία.

Απάντηση

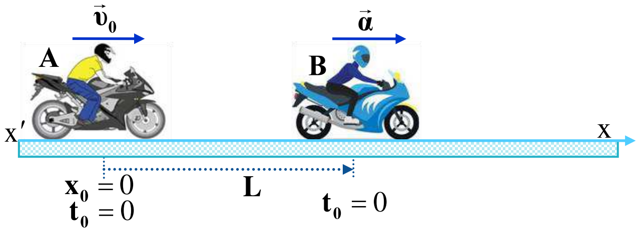
Απάντηση:

α. Εξισώσεις κίνησης για το σύστημα αναφοράς του σου σχήματος,

Κινητό Α: $x_A = \upsilon_0 t$, $\upsilon_A = \upsilon_0 = σταθ.$, Κινητό Β: $x_B = L + \frac{1}{2}\alpha t^2$, $\upsilon_B = \alpha t$

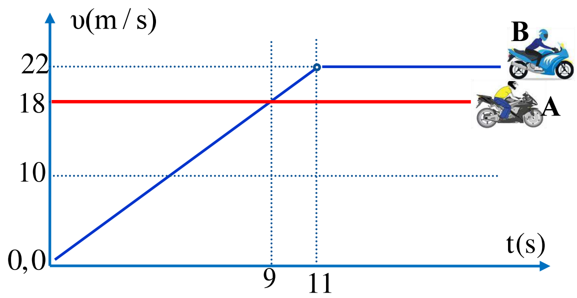
Έστω ότι συναντώνται , οπότε $x_A = x_B \Rightarrow \upsilon_0 t = L + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha t^2 - 2\upsilon_0 t + 2L = 0 \xrightarrow{S.I}$

$2t^2 - 36t + 200 = 0 \Rightarrow t^2 - 18t + 100 = 0$ (1). Για να υπάρξει συνάντηση πρέπει οι ρίζες της (1) να είναι πραγματικές $t \in \mathbb{R}$ [… και για το δεδομένο σύστημα αναφοράς θετικές $t \in \mathbb{Z}^+$] και προς τούτο πρέπει να έχει διακρίνουσα $\Delta \geq 0$. Παρατηρούμε όμως ότι $\Delta = 18^2 - 4 \cdot 100$ ή $\Delta = -76 < 0$ που σημαίνει **δεν υπάρχουν πραγματικές χρονικές στιγμές** που να πληρούται η (1) δηλαδή η συνθήκη συνάντησης.



β. Ο Α πλησιάζει τον Β για όσο χρόνο η ταχύτητά του είναι μεγαλύτερη από αυτή του Β $\upsilon_A > \upsilon_B$, όταν $\upsilon_A = \upsilon_B$ τότε τον έχει πλησιάσει στην ελάχιστη απόσταση και όταν $\upsilon_A < \upsilon_B$, τότε ο Β απομακρύνεται από τον Α. Παρατηρούμε ότι $\upsilon_A = \upsilon_B$ ή

$\upsilon_0 = \alpha t$ ή $t = \frac{\upsilon_0}{\alpha} \xrightarrow{S.I} t_1 = 9s$.



Αυτά φαίνονται και στο διάγραμμα των ταχυτήτων, στο $0 \leq t \leq 9s$ $\upsilon_A \geq \upsilon_B$ οπότε ο Α πλησιάζει τον Β και για $t > 9s$ $\upsilon_B > \upsilon_A$, οπότε ο Β απομακρύνεται από τον Α.

Την χρονική στιγμή $t_1 = 9s$ της ελάχιστης απόστασης $x_A = \upsilon_0 t_1 \xrightarrow{S.I} x_A = 162m$ και

$x_B = L + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 \xrightarrow{S.I} x_B = 181m$ άρα απέχουν $\Delta x_{min} = x_B - x_A \xrightarrow{S.I} \boldsymbol{\Delta x_{min} = 19m}$

γ. Έστω τώρα $\upsilon_A \neq \upsilon_0 = 18m/s$ ώστε να υπάρχει συνάντηση των δυο κινητών . Στην συνάντηση αυτή θα ισχύει $x_A = x_B \Rightarrow \upsilon_A t = L + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \alpha t^2 - 2\upsilon_A t + 2L = 0$ (2) .

Για να υπάρξει συνάντηση πρέπει οι ρίζες της (2) να είναι πραγματικές $t \in \mathbb{R}$ [… και για το δεδομένο σύστημα αναφοράς θετικές $t \in \mathbb{Z}^+$] και για να γίνει αυτό πρέπει να έχει διακρίνουσα $\Delta \geq 0$ ή $(2\upsilon_A)^2 - 4\alpha \cdot 2L \geq 0$ ή $4\upsilon_A^2 - 4\alpha \cdot 2L \geq 0$ ή $\upsilon_A \geq \sqrt{2\alpha L} \xrightarrow{S.I}$ $\boldsymbol{\upsilon_A \geq 20m/s}$. Άρα η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας του Α για την συνάντηση είναι $\boldsymbol{\upsilon'_{0,min} = 20m/s}$.

δ. Θέτουμε στην (2) $\upsilon'_{0,min} = 20m/s$ και βρίσκουμε την ρίζα αυτής που αποτελεί την χρονική στιγμή της συνάντησης. Η (2) επειδή Δ=0 έχει ρίζα $t = \frac{2\upsilon_A}{2\alpha} \xrightarrow{\upsilon_A = \upsilon'_{0,min}} t = \frac{\upsilon'_{0,min}}{\alpha}$

$\xrightarrow{S.I}$ $\mathbf{t = 10s}$ που είναι και η στιγμή της συνάντησης.

ε. Εδώ ζητείται η απόσταση των κινητών την χρονική στιγμή την χρονική στιγμή $t = 12s$.
Την στιγμή αυτή το κινητό Α που τώρα κινείται με ταχύτητα $υ_A$=20m/s θα είναι στην θέση

$$x_A = υ_A t \Rightarrow x_A = 20\frac{m}{s}12s \Rightarrow x_A = 240m$$

Το κινητό Β μέχρι την χρονική στιγμή $\mathbf{t'}$ που αποκτά ταχύτητα $\mathbf{υ_B}$**=22m/s** κινείται με σταθερή επιτάχυνση α=2m/s^2 … $υ_B = αt' \Rightarrow t' = \frac{υ_B}{α} \Rightarrow t' = \frac{22m/s}{2m/s^2} \Rightarrow \mathbf{t' = 11s}$. Εκείνη την στιγμή είναι στην θέση $x_B = L + \frac{1}{2}αt'^2 \Rightarrow x_B = 100m + \frac{1}{2}2\frac{m}{s^2}(11s)^2 \Rightarrow x_B = 221m$. Μετά την χρονική στιγμή $t' = 11s$ το κινητό Β κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_B$=22m/**s** οπότε για το υπόλοιπο χρονικό διάστημα $Δt = 12s - 11s = 1s$ μετατοπίζεται κατά $Δx'_B = υ_B Δt \Rightarrow$

$Δx'_B = 22\frac{m}{s}1s = 22m$ **και έτσι την** $t = 12s$ είναι την θέση $x'_B = 243m$.

Τα κινητά την $t = 12s$ απέχουν απόσταση $Δx = x'_B - x_A$ ή $\mathbf{Δx = 3m}$

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της θέσης του κινητού Β και του κινητού Α για τις δύο αυτού ταχύτητες των 18m/s και 20m/s/